# 1 Das Quadrat im Quadrat

1. Zeichne im Heft ein Quadrat mit der Seitenlänge von 14 cm.
2. Teile die Seiten im Verhältnis 6 cm zu 8 cm, so dass die 6 cm immer gegen den Uhrzeigersinn zu den 8 cm liegen. (siehe Abbildung 1.1)
3. Zeichne nun ein kleineres Quadrat in das größere Quadrat. Die Ecken des kleinen Quadrats liegen dabei auf den Markierungen der vorherigen Aufgabe.
4. Bestimme die Seitenlänge des kleineren Quadrats.

   $$c =$$

5. Zeige, dass die vier entstandenen Dreiecke kongruent zueinander sind.
6. Berechne die Gesamtfläche $A_D$ der vier Dreiecke zusammen, so wie die Flächen des großen ($A_G$) und des kleinen Quadrats ($A_K$). Beschreibe, was Dir auffällt.

   $$A_D =$$
   $$A_G =$$
   $$A_K =$$

7. Betrachte diese Figur nun allgemein mit den Strecken $a$, $b$ und $c$ wie in Abbildung 1.1 zu sehen. Gebe jeweils eine allgemeine Formel an für die Flächen $A_D$, $A_G$ und $A_K$ unter Verwendung der Strecken $a$, $b$ und $c$.

   $$A_D =$$
   $$A_G =$$
   $$A_K =$$

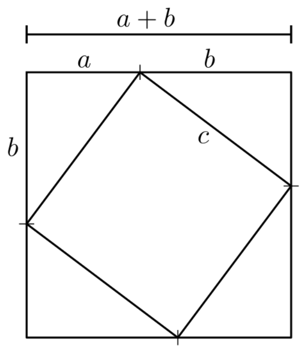
8. Drücke die Fläche $A_K$ des kleinen Quadrats mit den Flächen $A_G$ und $A_D$ aus.

   $$A_K =$$

9. Nutze die Ergebnisse der beiden vorherigen Aufgaben und erstelle eine Formel für

   $$c^2 =$$

   Vereinfache die Formel.



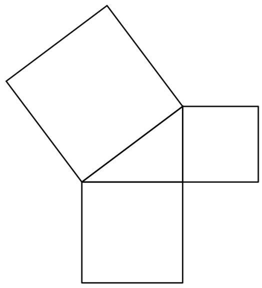

Tipps
Kongruenzsätze: sss, sws, wsw, Ssw
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Abbildung 1.1: Skizze zu den Quadraten und Hilfen

# 2 Das rechtwinklige Dreieck

**Definition 2.1.** *Ein Dreieck mit einem rechten Winkel bezeichnet man als* ***rechtwinkliges Dreieck****. Die beiden Seiten am rechten Winkel nennt man* ***Katheten****. Die Seite gegenüber dem rechten Winkel wird als* ***Hypothenuse*** *bezeichnet.*

**A 2.1.** Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $a = 4\,\text{cm}$ und $b = 3\,\text{cm}$.



a) Konstruiere das Dreieck in der **Mitte** eines DIN-A4-Blatts.
b) Beschrifte die Ecken, Seiten und Winkel im Dreieck. Kennzeichne Katheten und Hypothenuse.
c) Bestimme die Länge der Hypothenuse.
d) Zeichne an den jeweiligen Seiten ein Quadrat mit der Kantenlänge der Seite. Und zwar so, dass die Quadrate nicht durch das Dreieck gehen.
e) Vergleiche die Flächen der Quadrate miteinander.

**A 2.2.** Konstruiere die folgenden rechtwinkligen Dreiecke mit den angegebenen Katheten $a$ und $b$ und bestimme jeweils die Länge der Hypothenuse.

a) $a = 5\,\text{cm}$; $b = 12\,\text{cm}$
b) $a = 15\,\text{cm}$; $b = 8\,\text{cm}$
c) $a = 8\,\text{cm}$; $b = 6\,\text{cm}$

**A 2.3.** Konstruiere die folgenden rechtwinkligen Dreiecke mit der angegebenen Kathete $a$ und der Hypothenuse $c$. Bestimme jeweils die Länge der fehlenden Kathete. Nutze den Satz von Thales.

a) $a = 12\,\text{cm}$; $c = 20\,\text{cm}$
b) $a = 7\,\text{cm}$; $c = 25\,\text{cm}$
c) $a = 6\,\text{cm}$; $c = 6{,}5\,\text{cm}$

**A 2.4.** Stelle eine Formel auf, wie man die Hypothenuse aus den Katheten ermitteln kann. Nutze dazu die Erkenntnisse aus dem vorherigen Aufgabenblatt 1.

**A 2.5.** Berechne die Hypothenuse $c$ der folgenden rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten $a$ und $b$.

a) $a = 9\,\text{cm}$; $b = 40\,\text{cm}$
b) $a = 30\,\text{cm}$; $b = 16\,\text{cm}$
c) $a = 21\,\text{cm}$; $b = 20\,\text{cm}$

**A 2.6.** Stelle eine Formel auf, wie man die fehlende Kathete ermitteln kann, wenn eine Kathete und die Hypothenuse gegeben sind.

**A 2.7.** Berechne die fehlende Kathete $b$ der folgenden rechtwinkligen Dreiecke mit der Katheten $a$ und der Hypothenuse $c$.

a) $a = 33\,\text{cm}$; $c = 65\,\text{cm}$
b) $a = 40\,\text{cm}$; $c = 58\,\text{cm}$
c) $a = 4{,}5\,\text{cm}$; $c = 5{,}3\,\text{cm}$

**Lösungen**

2.2 a) 13 cm b) 17 cm c) 10 cm 2.3 a) 16 cm b) 24 cm c) 2,5 cm 2.5 a) 41 cm b) 34 cm c) 29 cm 2.7 a) 56 cm b) 42 cm c) 2,8 cm

# 3 Das gleichseitige Dreieck

Ein Bauherr plant ein Zeltdachhaus, dessen Giebelseite ein gleichseitiges Dreieck sein soll. Die Breite des Hauses und damit die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks soll 8 m betragen. Der Bauherr möchte die Höhe des Gebäudes berechnen.
Zuerst werden bekannte Informationen über das gleichseitige Dreieck gesammelt.

**Definition 3.1.** *Ein Dreieck, dessen Seiten gleich lang sind, bezeichnet man als* ***gleichseitiges Dreieck****.*

**Satz 3.1.** Alle Winkel im gleichseitigen Dreieck sind ________ groß.

**Satz 3.2.** Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen __________ groß und teilen die jeweilige Grundseite in der __________.

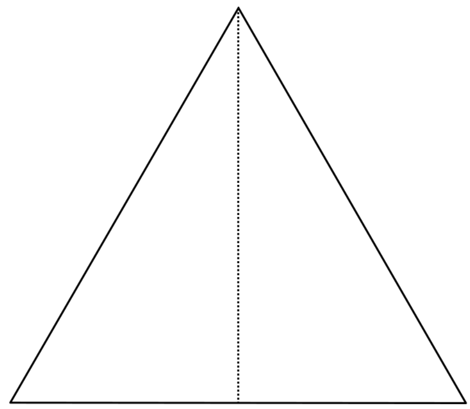


Abbildung 3.1: Skizze der Giebelseite des Zeltdachhauses mit Höhe

1. Suche ein rechtwinkliges Dreieck in der Abbildung 3.1. Zeichne in die Abbildung den rechten Winkel ein. Markiere in der Abbildung die Katheten rot und die Hypothenuse grün.
2. Beschrifte in der Abbildung 3.1 die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks mit den bekannten Längen.
3. Berechne mit dem Satz des Pythagoras die Höhe.
4. Konstruiere eine maßstabsgetreue Abbildung der Giebelseite um Deine Rechnung zu überprüfen.
5. Stelle nun eine allgemeine Formel für die Höhe $h$ eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a$ auf.

$h^2 =$ $\qquad$ $h =$

6. Der Bauherr will die Giebelseite mit Schindeln bedecken. Berechne die Fläche der Giebelseite.
7. Stelle eine Formel für die Fläche $A$ eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a$ auf.

$A =$

8. Der Bebauungsplan erlaubt nur Häuser bis zu einer Höhe von 6 m. Berechne die maximal mögliche Seitenlänge für ein Zeltdachhause mit gleichseitiger Giebelfläche.

**A 3.1.** Für ein neues Segelboot soll ein Segel in der Form eines gleichseitigen Dreiecks angefertigt werden. Die Segelfläche soll $25\,\mathrm{m}^2$ betragen. Berechne die Höhe und Seitenlänge des Segels.

# 4 Inselspiel: Entfernung zwischen zwei Punkten

Lucas und Kim haben sich ein Spiel ausgedacht, in dem Handel zwischen kleinen Inseln getrieben wird. Die Position der Inseln haben sie durch ein Koordinatensystem festgelegt. So hat die Insel Facia die Koordinaten (1|7). Die erste Zahl steht für den $x$-Wert (Horizontale Achse) und die zweite Zahl für den $y$-Wert (Vertikale Achse). Sie haben festgelegt, dass ein Schiff eine Längeneinheit pro Tag bzw. Runde zurücklegen kann. Die Schiffe nehmen dabei immer den direkten Weg von Insel zu Insel. Bei den Entfernungen wird immer auf volle Längeneinheiten aufgerundet.

**Die Inseln**

| | |
|---|---|
| Ada | (0\|0) |
| Bostan | (3\|0) |
| Cihan | (0\|4) |
| Deli | (3\|4) |
| Ekvator | (-4\|0) |
| Facia | (1\|7) |
| Gemici | (-4\|-5) |
| Hamsi | (-5\|-1) |
| Istim | (7\|-6) |
| Kirbac | (-3\|7) |

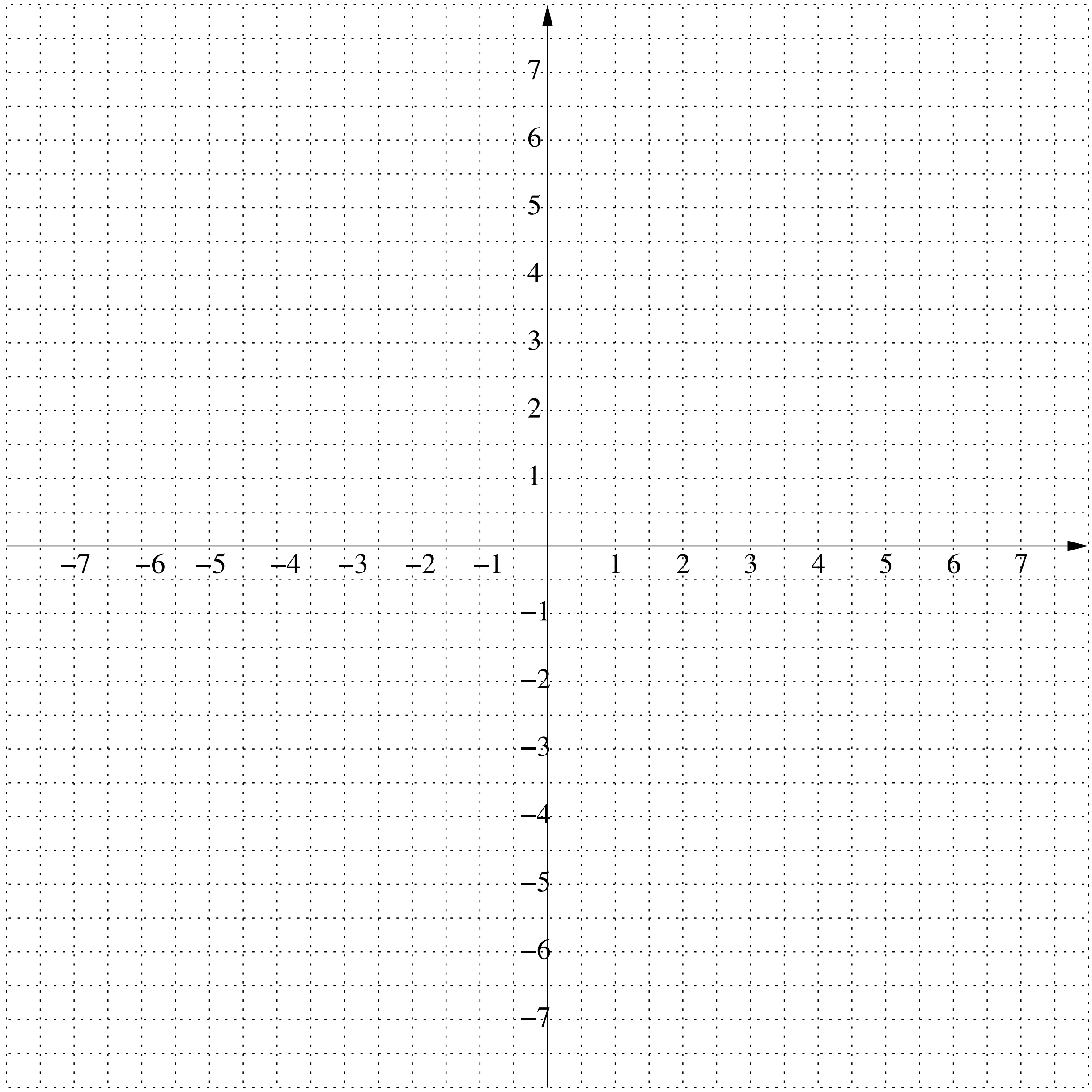



Abbildung 4.1: Die Karte der Inselwelt

| | Ada | Bostan | Chian | Deli | Ekvator | Facia | Gemici | Hamsi | Istim | Kirbac |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ada | | | | | | | | | | |
| Bostan | | | | | | | | | | |
| Chian | | | | | | | | | | |
| Deli | | | | | | | | | | |
| Ekvator | | | | | | | | | | |
| Facia | | | | | | | | | | |
| Gemici | | | | | | | | | | |
| Hamsi | | | | | | | | | | |
| Istim | | | | | | | | | | |
| Kirbac | | | | | | | | | | |

Tabelle 4.1: Entfernungstabelle

## Aufgaben

1. Gib an, welches die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in einer Ebene ist.
2. Trage die Insel in die Karte (Abbildung 4.1) ein.
3. Ermittle die Entfernung zwischen ...
   a) Ada und Bostan :
   b) Ada und Cihan :
   c) Bostan und Deli :
   d) Chian und Deli :
4. Beschreibe, wie man ohne die Strecke auszumessen, die Entfernung aus den Koordinaten bestimmen kann.
5. Zeichne die Strecken Ada-Bostan, Bostan-Deli und Deli-Ada in die Karte ein. Gebe die geometrische Figur an, die sich ergibt.
6. Bestimme die Entfernung zwischen Ada und Deli.
7. Gib an, wie man die Entfernung $e$ zwischen Ada und einer Insel mit den Koordinaten $(x|y)$ bestimmen kann.
8. Bestimme alle Entfernungen zwischen der Insel Ada und den anderen Inseln und trage Deine Ergebnisse in Tabelle 4.1 ein.
9. Die Entfernungsbestimmung für die Insel Ada ist relativ einfach, da sie die Koordinaten $(0|0)$ besitzt. Jetzt soll die Entfernung zwischen Deli und Faci bestimmt werden.
   a) Zeichne die Strecke Deli-Faci in die Karte ein.
   b) Zeichne dazu passend Katheten ein, die jeweils parallel zu den Koordinatenachsen sind.
   c) Gebe den Punkt an, an dem sich der rechte Winkel des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks sich befindet.
   d) Bestimme die Kathetenlängen aus den Koordinaten.
   e) Berechne aus den Kathetenlängen die Länge der Hypotenuse und damit die Entfernung zwischen Deli und Facia.
10. Gib an, wie man die Entfernung zwischen zwei beliebigen Inseln mit den Koordinaten $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ bestimmen kann.
11. Berechne die Entfernung zwischen allen Inseln und trage Deine Ergebnisse in die Tabelle 4.1 ein.

# 5 Das Haus des Pythagoras (Höhen- und Kathetensätze)

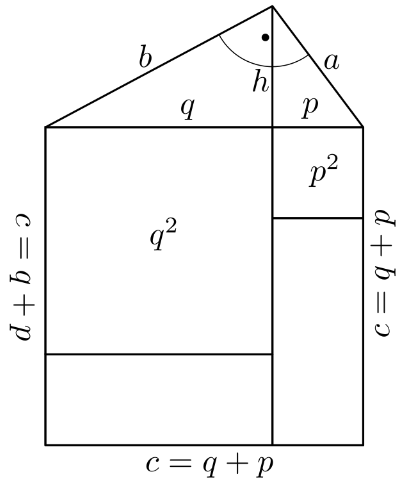



Abbildung 5.1: Das Haus des Pythagoras

Das Haus des Pythagoras, wie in Abbildung 5.1 zu sehen, besteht aus einem rechtwinkligen Dreieck als Dach und dem Hypothenusenquadrat $c^2$. Die Höhe $h$ teilt die Hypothenuse in zwei Teile $p$ und $q$. Die Höhe $h$ teilt auch das Hypothenusenquadrat $c^2$ in zwei Rechtecke, die die Quadrate $p^2$ und $q^2$ enthalten.

1. Trage die Fläche der beiden Rechtecke in die Abbildung 5.1 als Formel ein.
2. Stelle $c^2$ durch die Flächen der Quadrate und Rechtecke im Hypothenusenquadrat dar.

$$c^2 = p^2 + \qquad +q^2 \tag{5.1}$$

3. Stelle den Satz des Pythagoras für die Dreiecke mit den Seiten $ahp$ und $bhq$ auf.

$$a^2 = \tag{5.2}$$

$$b^2 = \tag{5.3}$$

4. Für das große Dreieck $abc$ gilt $c^2 = a^2 + b^2$. Nutze Dein Ergebnis aus den Gleichungen (5.2) und (5.3) und ersetze $a^2$ und $b^2$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = \tag{5.4}$$

5. Vergleiche die Gleichungen (5.1) und (5.4) miteinander. Stelle nun eine Formel für $h$ auf.

$$h^2 = \tag{5.5}$$

6. Ersetze in den beiden Gleichungen (5.2) und (5.3) das $h^2$ mit Hilfe der Gleichung 5.5.

$$a^2 = \tag{5.6}$$

$$b^2 = \tag{5.7}$$

7. Klammere $p$ bzw. $q$ aus.

$$a^2 = p \cdot (\qquad\qquad) \tag{5.8}$$

$$b^2 = q \cdot (\qquad\qquad) \tag{5.9}$$

8. Ersetze den Term in Klammern sinnvoll durch eine Seite aus dem Haus des Pythagoras (Abbildung 5.1).

$$a^2 = p \cdot \tag{5.10}$$

$$b^2 = q \cdot \tag{5.11}$$

---

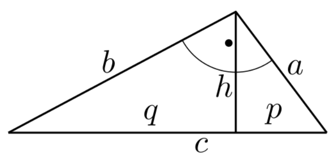



Abbildung 5.2: Gleichseitiges Dreieck

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a$ und $b$ und der Hypothenuse $c$.

**Satz 1. Höhensatz**: Für die Höhe des Dreiecks gilt:

$$h^2 = \qquad \cdot \tag{5.12}$$

**Satz 2. Kathetensätze**: Für die Katheten des Dreiecks gilt:

$$a^2 = \qquad \cdot \qquad\qquad\qquad b^2 = \qquad \cdot \tag{5.13}$$

# Inhaltsverzeichnis