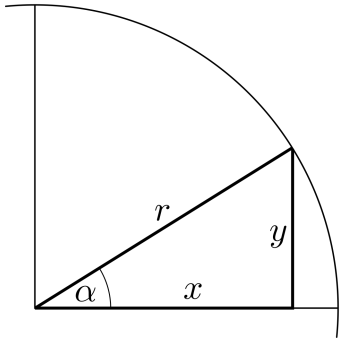


Abbildung 1.1: Links: Rechtwinkliges Dreieck mit der Ankathete $x$, der Gegenkathete $y$ zum Winkel $\alpha$ und der Hypotenuse $r$ im Vierteilkreis. Rechts: Die Schwebebahn in Dresden (Quelle: Wikipedia; Fotograf: Norbert Aepli)

# 1 Zusammenhang zwischen Winkeln und Seitenverhältnissen im rechtwinkligem Dreick.

**A 1.1.** Der Zusammenhang zwischen den spitzen Winkeln und den Katheten im rechtwinklingen Dreieck soll untersucht werden.

a) Zeichne einen Vierteilkreis mit dem Radius $r = 10\,\text{cm}$ wie in Abbildung 1.1 links zu sehen.
b) Zeichne nun, wie in Abbildung 1.1 zu sehen, ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel $\alpha = 45°$ ein. Bestimme die Länge der Katheten $x$ und $y$. Beschreibe, was Dir auffällt.
c) Bestimme nun auf die gleiche Weise, die Längen der Katheten $x$ und $y$ bei $50°$ und $60°$ . Vergleiche Deine Ergebnisse mit den bereits eingetragenen Werten in der Tabelle.
d) Bestimme nun die Längen der restlichen Katheten $x$ und $y$ und trage sie in die Tabelle unten ein. Gehe dabei geschickt vor und nutze das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe.
e) Berechne die Quotienten $x/r$, $y/r$, $y/x$ und $x/y$ und trage sie in die Tabelle ein.

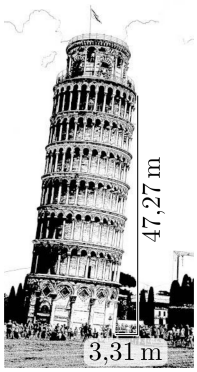
| | $r = 10\,\text{cm}$ | | Quotienten | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ [Grad] | $x$ [cm] | $y$ [cm] | $x/r$ | $y/r$ | $y/x$ | $x/y$ |
| 0 | | | | | | — |
| 5 | | | | | | |
| 10 | 9,8 | 1,7 | 0,98 | 0,17 | 0,18 | 5,67 |
| 15 | | | | | | |
| 20 | 9,4 | 3,4 | 0,94 | 0,34 | 0,36 | 2,75 |
| 25 | | | | | | |
| 30 | 8,7 | 5,0 | 0,87 | 0,50 | 0,58 | 1,73 |
| 35 | | | | | | |
| 40 | 7,7 | 6,4 | 0,77 | 0,64 | 0,84 | 1,19 |
| 45 | | | | | | |
| 50 | | | | | | |
| 55 | | | | | | |
| 60 | | | | | | |
| 65 | | | | | | |
| 70 | | | | | | |
| 75 | | | | | | |
| 80 | | | | | | |
| 85 | | | | | | |
| 90 | | | | | | |

Tabelle 1.1: Zusammenhang zwischen Winkel und Kathetenlängen

**A 1.2.** Die Schwebebahn Dresden ist eine Einschienenhängebahn, welche die Stadtteile Loschwitz und Oberloschwitz verbindet. Die am 6. Mai 1901 eröffnete Bahn ist 274 Meter lang und überwindet einen Höhenunterschied von etwa 84 Metern. Die Steigung der Bahn ist konstant.

a) Schätze mit den Daten aus der vorherigen Aufgabe ab, wie groß der Steigungswinkel der Bahn ist.
b) Zeichne maßstabsgetreu ein passendes rechtwinkliges Dreieck und überprüfe Dein Ergebnis.
c) Eine 300 m lange Bahn hat einen Steigungswinkel von 30° . Bestimme mit Hilfe der Tabelle aus der vorherigen Aufgabe den dabei überwundenen Höhenunterschied.

**A 1.3.** Der schiefe Turm von Pisa ist das wohl bekannteste schiefe Bauwerk auf der Welt. Auf einer Klassenfahrt fordert der Fremdenführer die Schüler auf, die Schieflage des Turms zu bestimmen. Um den tatsächlichen Wert zu bestimmen, lässt er ein Lot (Seil mit einem Gewicht) von der zweitobersten Plattform herunter. Das Lot kommt im Abstand von 3,31 m vom Turm auf dem Boden auf. Die Lotlänge und damit die Höhe bis zur Plattform beträgt 47,27 m.




a) Schätze mit Hilfe der Tabelle aus Aufgabe 1.1 die Abweichung von der Senkrechten in Grad ab.
b) Bestimme den Winkel mit Hilfe der Tabelle 1.2.
c) 1990 hatte der schiefe Turm ein stärkere Schieflage, die durch Sanierungsmaßnahmen verringert werden konnte. 1990 hätte das Lot einen Abstand von 4.55 m vom Turm gehabt. Schätze den Winkel mit Hilfe der Tabelle 1.2 ab.

| Winkel [° ] | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y/x$ | 5,67 | 6,31 | 7,12 | 8,14 | 9,51 | 11,4 | 14,3 | 19,1 | 28,6 | 57,3 |

Tabelle 1.2: Bestimmung des Quotienten $y/x$ für große Winkel.

# 2 Sinus und Cosinus

**Definition 2.1.** *In rechtwinkligen Dreiecken bezeichnet man die Kathete, die einem Winkel gegenüberliegt, als* ***Gegenkathete****, die Kathete, die am Winkel anliegt, als* ***Ankathete****.*

**Definition 2.2.** *Das Seitenverhältnis Gegenkathete zu Hypotenuse bezeichnet man als* ***Sinus*** *des Winkels und das Seitenverhältnis von Ankathete zu Hypotenuse bezeichnet man als* ***Cosinus*** *des Winkels. Es gilt*

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \tag{2.1}$$

| SIN | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 0,0175 | 0,0349 | 0,0523 | 0,0698 | 0,0872 | 0,1045 | 0,1219 | 0,1392 | 0,1564 | 0,1736 | 80 |
| 10 | 0,1736 | 0,1908 | 0,2079 | 0,2250 | 0,2419 | 0,2588 | 0,2756 | 0,2924 | 0,3090 | 0,3256 | 0,3420 | 70 |
| 20 | 0,3420 | 0,3584 | 0,3746 | 0,3907 | 0,4067 | 0,4226 | 0,4384 | 0,4540 | 0,4695 | 0,4848 | 0,5000 | 60 |
| 30 | 0,5000 | 0,5150 | 0,5299 | 0,5446 | 0,5592 | 0,5736 | 0,5878 | 0,6018 | 0,6157 | 0,6293 | 0,6428 | 50 |
| 40 | 0,6428 | 0,6561 | 0,6691 | 0,6820 | 0,6947 | 0,7071 | 0,7193 | 0,7314 | 0,7431 | 0,7547 | 0,7660 | 40 |
| 50 | 0,7660 | 0,7771 | 0,7880 | 0,7986 | 0,8090 | 0,8192 | 0,8290 | 0,8387 | 0,8480 | 0,8572 | 0,8660 | 30 |
| 60 | 0,8660 | 0,8746 | 0,8829 | 0,8910 | 0,8988 | 0,9063 | 0,9135 | 0,9205 | 0,9272 | 0,9336 | 0,9397 | 20 |
| 70 | 0,9397 | 0,9455 | 0,9511 | 0,9563 | 0,9613 | 0,9659 | 0,9703 | 0,9744 | 0,9781 | 0,9816 | 0,9848 | 10 |
| 80 | 0,9848 | 0,9877 | 0,9903 | 0,9925 | 0,9945 | 0,9962 | 0,9976 | 0,9986 | 0,9994 | 0,9998 | 1,0000 | 0 |
| | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | COS |

Tabelle 2.1: Werte für den Sinus und Cosinus für die Winkel von 0° bis 90° .

# 3 Höhen- und Tiefenwinkel bestimmen

Höhen-, Tiefen- und Sehwinkel werden zur Höhenbestimmung benutzt. Der Winkel zwischen Waagerechter und Sichtstrahl bezeichnet man als Höhenwinkel, wenn der Sichtstrahl über der Waagerechten liegt und als Tiefenwinkel, wenn er unter der Waagerechten liegt.

Zur Messung des Höhen- und Tiefenwinkels dient ein vertikaler Winkelmesser.

Über die Peilkante visierst Du dein Ziel an. Der Faden zeigt nun senkrecht zum Boden. Mit einem Finger drückst Du nun den Faden am unteren Rand auf die Scheibe. Jetzt kannst Du den Winkelmesser so drehen, dass Du die Gradeinteilung sehen und ablesen kannst.

Mit einer geraden Holzleiste kannst Du die Peilkante verbessern. Vielleicht fällt Dir noch mehr ein, wie man den Winkelmesser verbessern kann.

**Bauanleitung**

1. Schneide die Winkelscheibe in Abbildung 3.2 grob aus und klebe sie auf ein Stück feste Pappe.
2. Schneide nun die Scheibe auf der Pappe sorgfältig aus. Achte darauf, dass die obere Kante (Peilkante) genau gerade ist. Ideal dafür ist ein Cuttermesser und ein Lineal.
3. Nun brauchst Du noch etwas Nähgarn (dünnen Faden) und einen kleinen schweren Gegenstand (z.B. eine Mutter). Binde den Gegenstand an den Faden. Wenn Du nun den Faden an dem anderen Ende in die Hand nimmst, zeigt der Faden senkrecht nach unten. Dies bezeichnet man als Lot.
4. Befestige nun den Faden an einer Nadel (Nagel, Heftzwecke). Der Faden muss länger sein, als der Radius der Winkelscheibe.
5. Stecke nun die Nadel (Nagel, Heftzwecke) in die Mitte des kleinen Kreises.

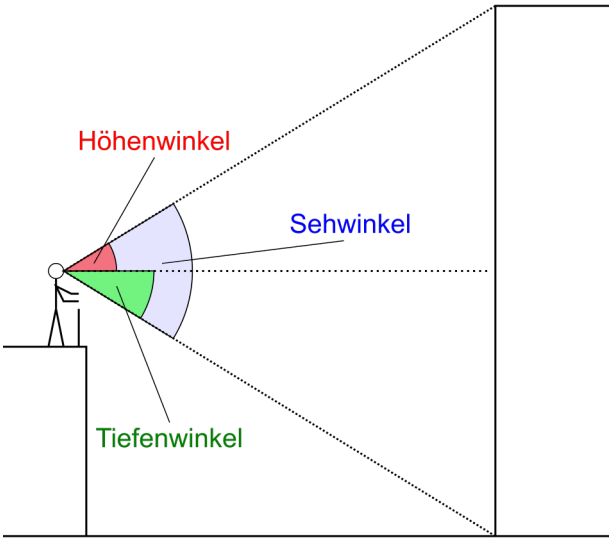



Abbildung 3.1: Höhen-, Tiefen- und Sehwinkel

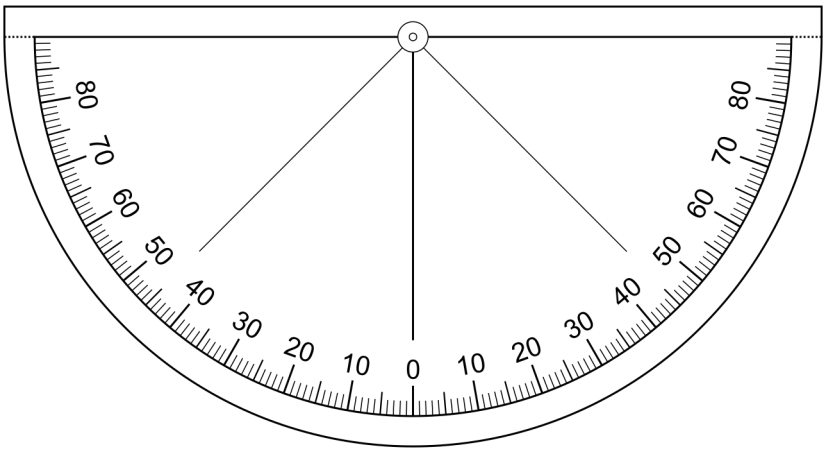



Abbildung 3.2: Winkelscheibe für die Höhenmessung

# 4 Dreieck sws berechnen

Ist von einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (sws) bekannt, so ist dieses Dreieck eindeutig definiert und kann konstruiert werden. Damit müsste es auch möglich sein, die fehlenden Seiten und Winkel berechnen zu können.

**A 4.1.** Notiere die Formeln aus dem Werkzeugkasten für rechtwinklige Dreiecke und wie man die Fläche eines Dreiecks berechnen kann.

**A 4.2.** Gegeben ist das Dreieck mit der Seite $b = 5\,\text{cm}$, dem Winkel $\alpha = 30°$ und der Seite $c = 7\,\text{cm}$. Konstruiere das Dreieck.

**A 4.3.** Schaue Dir Abbildung 4.1 an. Das Dreieck mit den Seiten $b$, $p$ und $h_c$ ist rechtwinklig. Halte Dich an die Reihenfolge der folgenden Teilaufgaben und Du kannst Stück für Stück die fehlenden Seiten und Winkel berechnen.

a) Benenne für den Winkel $\alpha$ die Katheten und die Hypotenuse für dieses Dreieck.
b) Berechne die Höhe $h_c$.
c) Berechne die Fläche des Dreiecks.
d) Berechne die Seite $p$.
e) Berechne die Seite $q$.
f) Berechne die Seite $a$.
g) Berechne den Winkel $\beta$.
h) Berechne den Winkel $\gamma$.

**A 4.4.** Es gibt noch zwei weitere Höhen im Dreieck.

a) Zeichne die Höhen $h_a$ und $h_b$ in Abbildung 4.1 ein.
b) Berechne die Höhen jeweils mit zwei verschiedenen Verfahren.

**A 4.5.** Überprüfe Deine Ergebnisse aus den Aufgaben 4.3 und 4.4 mit Deiner Konstruktion aus Aufgabe 4.2.

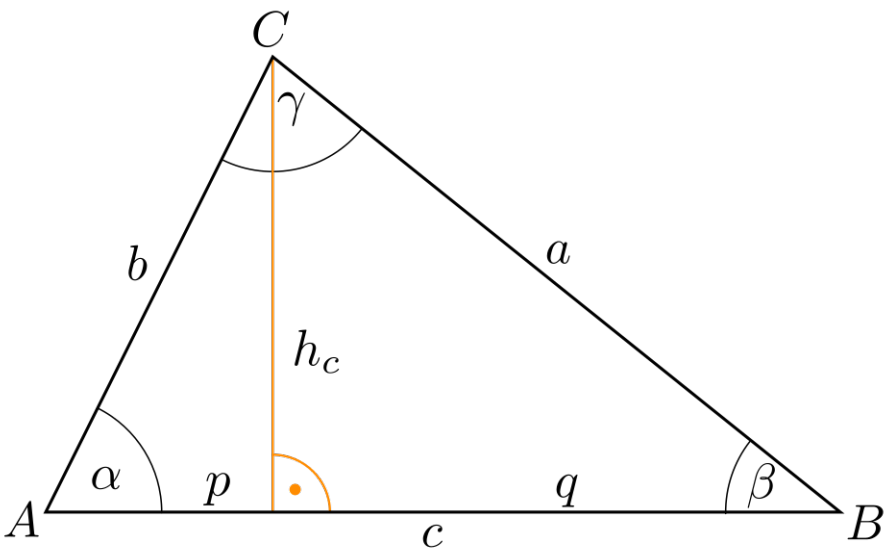



Abbildung 4.1: Beliebiges Dreieck $ABC$ mit Höhe $h_c$.

# 5 Seitenwinkel bestimmen

Um einen Winkel zwischen zwei Objekten zu bestimmen, kannst Du Dir einen Winkelmesser bauen.

1. Schneide die Gradscheibe grob aus, klebe sie auf eine kräftige Pappe und schneide sie nun exakt aus.
2. Stecke eine Heftzwecke oder einen Nagel durch die kleinen Kreis bei 0 und 180 Grad von unten, so dass die Spitzen nach oben zeigen. Darüber kannst Du nun peilen.
3. Als Unterlage kannst Du einen Pappkarton oder ein Holzbrett nehmen. Zeichne eine 20 cm lange Linie auf den Karton bzw. das Brett. Befestige nun mit einer Heftzwecke oder Nagel die Gradscheibe auf dem Karton bzw. Brett, so dass sie drehbar ist.
4. An die Enden der Linie kommen auch zwei Heftzwecken oder Nägel, die mit der Spitze nach oben zeigen. Diese dienen auch zur Peilung.

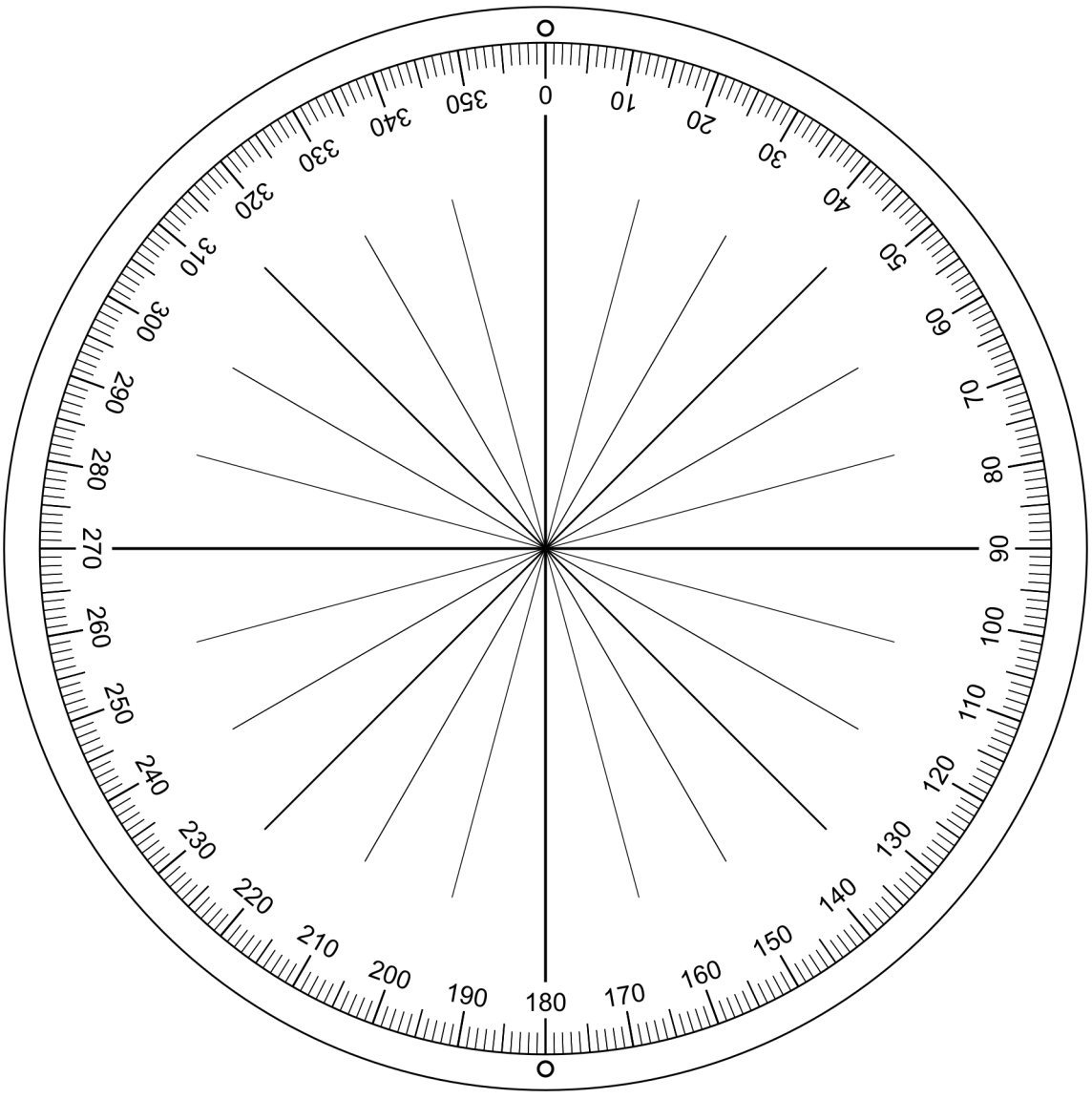



Abbildung 5.1: Gradscheibe

# 6 Berechnungen in beliebigen Dreiecken

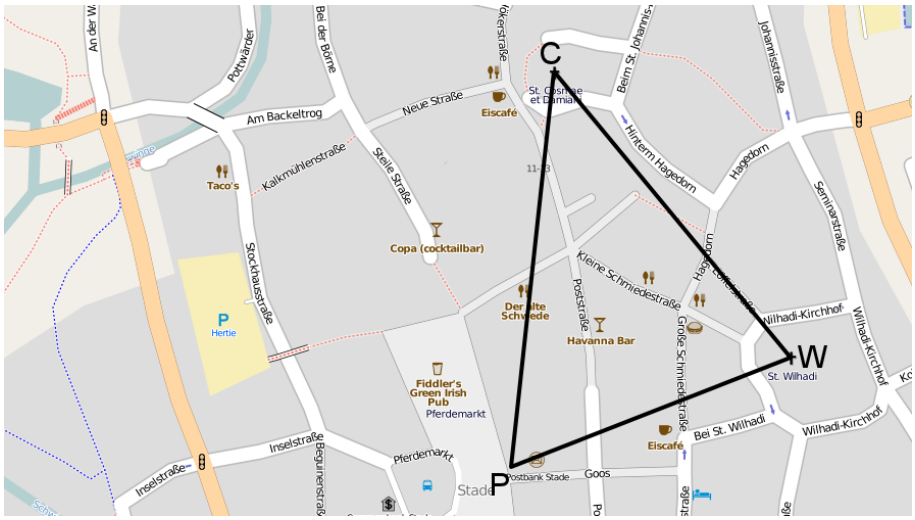



Abbildung 6.1:
Cosmae - Wilhadi - Post

$\measuredangle PCW = 46{,}1°$
$\measuredangle CWP = 71{,}0°$
$|CW| = 190\,\text{m}$

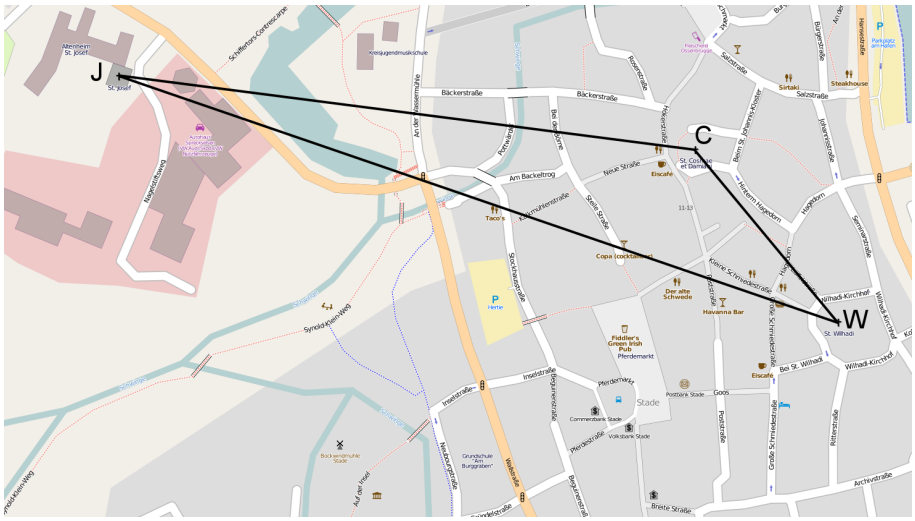



Abbildung 6.2:
Cosmae - Wilhadi - Josef

$\measuredangle JCW = 137{,}3°$
$\measuredangle CWJ = 31{,}4°$
$|CW| = 190\,\text{m}$

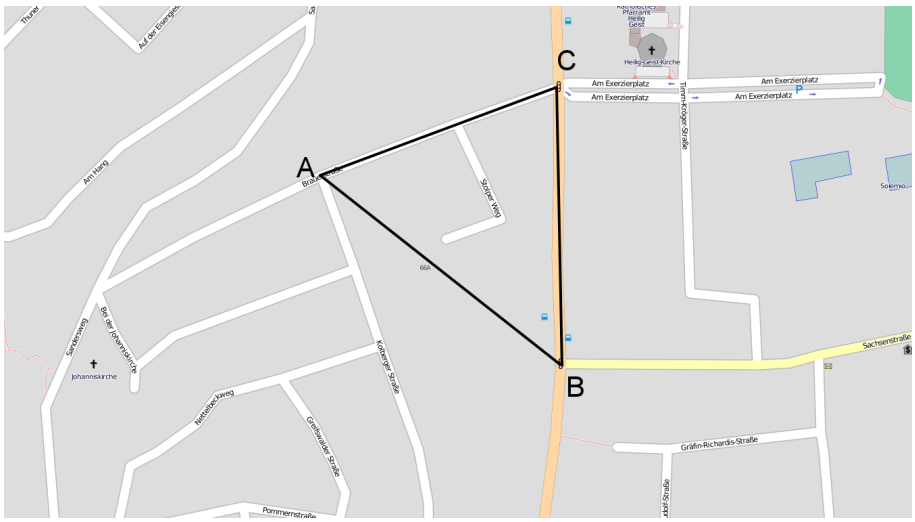



Abbildung 6.3:
Brauerstr. - Harsefelder - Leitung

$\measuredangle ACB = 70{,}8°$
$|AC| = 210\,\text{m}$
$|BC| = 230\,\text{m}$