1 Grundwissen

1.1 Gleichförmige Kreisbewegung

Für eine Kreisbewegung mit n Umläufen in der Zeit t gilt:

$$\text{Umlaufzeit} \quad T = \frac{t}{n} \qquad \text{und} \qquad \text{Frequenz} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} \tag{1.1}$$

Der in einem Zeitabschnitt Δt vom Radiusvektor überstrichene Winkel $\Delta\varphi$ wird nicht in Grad sondern im Bogenmaß gemessen. Es gilt

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} \quad \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{1.2}$$

Hat der Kreis den Radius r und wird in einem Zeitabschnitt Δt der Bogen Δs zurückgelegt, dann gilt:

$$\text{Bahngeschwindigkeit} \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi \cdot r}{\Delta t} = \omega r \tag{1.3}$$

Die Beschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung ist immer orthogonal zur Bahngeschwindigkeit und zeigt zum Zentrum des Kreises.

$$\text{Zentripetalbeschleunigung} \quad a_z = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \qquad \text{und} \qquad \text{Zentripetalkraft} \quad F_z = m a_z = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \tag{1.4}$$

Aufgaben

A 1.1. Der Rotor (Durchmesser 13 m) des Hubschraubers UH Tiger dreht sich im Flug 330-mal pro Minute um seine Achse.

a) Bestimmen Sie die Frequenz f, Umlaufzeit T und die Winkelgeschwindigkeit ω des Rotors.
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rotorspitzen und die darauf wirkende Beschleunigung.

A 1.2. Der Velaro E ist eine Weiterentwicklung des ICE 3 für Spanien. Seine Räder haben im Neuzustand einen Durchmesser von 920 mm. Die Räder können bis 840 mm abgefahren werden. Die Höchstgeschwindigkeit des Velaro E beträgt 350 km/h.

a) Berechnen Sie Umlaufzeit und Frequenz der Räder bei Höchstgeschwindigkeit und nagelneuen Rädern.
b) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Rades.
c) An einem der neuen Räder ist ein Stück mit der Masse $m = 50\,\text{g}$ abgeplatzt. Diskutieren Sie, welche Kräfte auf das Rad dadurch wirken.

A 1.3. Die Erde dreht sich, bezogen auf den Sternenhimmel, in 23 h 56 min 4 s einmal um die eigene Achse. Diese Zeit bezeichnet man als Sternentag. Der Radius der Erde beträgt ca. 6370 km.

a) Bestimmen Sie für die Rotation der Erde um ihre Achse die Frequenz f und die Winkelgeschwindigkeit ω.
b) Vergleichen Sie die durch die Erddrehung verursachte Geschwindigkeit und Zentripetalbeschleunigung für einen Menschen am Äquator und in Stade (Breitengrad $56°\,36'$ N).
c) Begründen Sie, weshalb ein Mensch am Äquator schwerer wäre, wenn sich die Erde nicht drehen würde. Betrachen Sie die Situation auch quantitativ.
d) Berechnen Sie die Länge eines Sternentages, wenn ein Körper am Äquator scheinbar schwerelos wäre.

A 1.4. Ein Satellit bewegt sich auf einer Kreisbahn von Ost nach West in 200 km Höhe über dem Äquator um die Erde. Der Umfang der Erde am Äquator beträgt 40 076,6 km. Der Ortsfaktor in 200 km Höhe beträgt $9{,}22\,\text{m/s}^2$.

a) Zeigen Sie, dass der Bahnradius des Satelliten etwa 6578 km beträgt.
b) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit und Umlaufzeit bezogen auf die Erde für den Satelliten! Berücksichtigen Sie nicht die Eigendrehung der Erde.
c) Vergleichen Sie Winkelgeschwindigkeit und Umlaufzeit des Satelliten mit Berücksichtigung und ohne Berücksichtigung der Eigendrehung der Erde.
d) Begründen Sie, warum Satelliten meistens in östlicher Richtung gestartet werden.

1.2 Das Hookesche Gesetz

Eine auseinandergezogene oder zusammengedrückte elastische Feder übt eine Kraft aus, die sogenannte Federkraft F_F. Die Federkraft ist proportional zu der Längenänderung der Feder. Das Hookesche Gesetz gilt nur im elastischen Bereich. Dehnt man eine Feder zu stark, so verlässt sie den elastischen Bereich und wird eventuell sogar zerstört.

$$\text{Federkraft} = \text{Federkonstante} \cdot \text{Längenänderung} \qquad F_F = D \cdot \Delta l \tag{1.5}$$

Zieht man die Feder mit einer Kraft auseinander, dann ändert sich die Länge der Feder. Teilt man die ausgeübte Kraft durch die dadurch verursachte Längenänderung, dann erhält man die Federkonstante, die eine Eigenschaft der Feder ist: $D = \frac{F_F}{\Delta l}$

Die Längenänderung der Feder bei Krafteinwirkung ergibt sich aus dem Quotienten aus wirkender Kraft und der Federkonstanten: $\Delta l = \frac{F_F}{D}$

Hängt man an eine Feder eine Masse, so übt diese Masse eine Gewichtskraft aus, die die Feder auseinanderzieht. Dies passiert so lange, bis Federkraft und Gewichtskraft gleich groß sind.

Die Gesamtlänge l einer belasteten Feder setzt sich aus ihrer Grundlänge l_0 im unbelasteten Zustand und ihrer Längenänderung Δl durch die Belastung zusammen. Es gilt: $l = l_0 + \Delta l$

Hängt man ein Massestück an die Feder, so stellt sich zwischen der Gewichtskraft und der Federkraft ein Gleichgewicht ein. Es gilt

$$m \cdot g = D \cdot \Delta l \tag{1.6}$$

Aufgaben

A 1.5. Eine Feder wird durch eine Kraft von 5 N um 10 cm ausgelenkt. Bestimmen Sie die Federkonstante D der Feder.

A 1.6. An einer Feder mit der Federkonstanten $D = 20\,\mathrm{N/m}$ und der Länge $l_0 = 10\,\mathrm{cm}$ im unbelasteten Zustand wirkt eine Kraft von 5 N. Bestimmen Sie die Länge der belasteten Feder.

A 1.7. Eine Feder mit der Federkonstanten $D = 30\,\mathrm{N/m}$ wird innerhalb ihres elastischen Bereichs mit Kräften belastet. Bestimmen Sie aus der Längenänderung die angehängte Kraft.

Δl [cm]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
F [N]										

A 1.8. Gegeben ist folgende Tabelle für die Ausdehnung einer Feder. Bestimme den elastischen Bereich der Feder.

F [N]	1	2	4	6	8	11	15	19	25	30
Δl [cm]	2,3	4,6	9,2	13,8	20,8	25,3	34,5	40,2	42,5	44,2

A 1.9. Eine Feder mit der Länge $l_0 = 10\,\mathrm{cm}$ im unbelasteten Zustand wird durch eine Kraft von 5 N auf eine Länge $l_1 = 15\,\mathrm{cm}$ ausgedehnt. Bestimmen Sie die Ausdehnung l_2 der Feder, wenn eine Kraft von 12 N angelegt wird und die Feder im elastischen Bereich bleibt.

A 1.10. Eine Feder mit der Federkonstante $D = 5\,\mathrm{N/cm}$ wird auf der Erde durch eine Bleikugel um $\Delta l = 20\,\mathrm{cm}$ ausgelenkt. Bestimmen Sie die Masse der Bleikugel!

A 1.11. Eine Asteroidensonde besitzt ein Meßgerät ($m = 500\,\mathrm{g}$), dass an einer Feder $D = 0{,}1\,\mathrm{N/cm}$ aufgehängt ist. Die Forscher messen eine Ausdehnung der Feder um $\Delta l = 1{,}35\,\mathrm{cm}$. Bestimmen Sie den Ortsfaktor des Asteroiden!

A 1.12. Ein Gerät ($m = 2\,\mathrm{kg}$) an der Mondfähre ($g_{\mathrm{Mond}} = 1{,}62\,\mathrm{N/kg}$) soll durch eine Feder um 1,5 m abgesenkt werden, so dass es knapp den Boden berührt. Bestimmen Sie die Federkonstante der Feder!

1.3 Diagramme zeichnen

Diagramme sind wichtige Elemente zur Auswertung der bei einem Experiment gewonnenen Daten. Daher sollte man einige wichtige Regel einhalten.

1. Ein Diagramm muss vernünftig beschriftet werden. Dazu gehört die Benennung der Achsen mit Größe und der verwendeten Einheit. Wird ein $y(x)$-Diagramm bzw. ein x-y-Diagramm gezeichnet, dann wird die Größe x auf der horizontalen (waagerechten) Achse und die Größe y auf der vertikalen (senkrechten) Achse abgetragen.
2. Die Aufteilung der Achsen, der sogenannte Maßstab, muss konsistent sein.
3. Um den funktionalen Zusammenhang richtig einschätzen zu können, muss das Diagramm die richtige Größe und Proportion aufweisen. Daher sollte der relevante Bereich, in dem die Punkte liegen, mindestens eine Größe von 8 cm mal 8 cm groß sein. Die Achsen sollten ungefähr die gleiche Größe besitzen. Maximal sollte das Verhältnis 2 zu 1 sein. Ausnahmen bestätigen die Regel.
4. Die Punkte des Diagramms werden erstmal nicht miteinander verbunden. Erst in der Auswertung wird dann eine Ausgleichsgerade bzw. eine Ausgleichskurve durch die Punkte gelegt.

1.4 Fehler und Fehlerrechnung

Jede Messung ist mit einem Fehler behaftet. Dieser kann unterschiedlich groß sein und sollte daher bei der Angabe des Messwertes auch angegeben werden. Dies kann in Form eines **absoluten Fehlers** oder eines **relativen Fehlers** erfolgen.

Beim **absoluten Fehler** gibt man den Fehlerbereich in der verwendeten Einheit an: z.B. $48 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$, $320 \pm 10\,\mathrm{mA}$ oder $5{,}5 \pm 0{,}25\,\mathrm{kg}$. Dann bedeutet $48 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$, dass der richtige Wert zwischen 47,5 cm und 48,5 cm liegt.

Beim **relativen Fehler** gibt man den Fehlerbereich in Prozent vom Messwert an: z.B. $220 \pm 5\%\,\Omega$, $500 \pm 10\%\,\mathrm{g}$ oder $640 \pm 5\,\mathrm{nm}$. Dann bedeutet $220 \pm 5\%\,\Omega$, dass der tatsächliche Wert zwischen $209\,\Omega$ und $231\,\Omega$ liegt.

Wenn schon der gemessene Wert einen Fehler besitzt, dann besitzt auch das Ergebnis einer Rechnung mit solchen Werten einen Fehler. Je mehr Werte mit einem Fehler in der Rechnung benutzt werden, desto größer ist auch der Fehler des Ergebnisses. Es gibt mehrere Methoden um den Fehler mehr oder minder genau zu berechnen.

Als Beispiel dient das folgende Experiment. Vor der Schule wurde um die Geschwindigkeit v von Autos zu messen eine Strecke $s = 48 \pm 0{,}5\,\mathbf{m}$ markiert und die Zeit t gemessen. Bei einer Messung wurde eine Zeit von $t = 3{,}8 \pm 0{,}1\,\mathbf{s}$ gemessen.

Man erhält für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{48\,\mathbf{m}}{3{,}8\,\mathbf{s}} \approx 12{,}632\,\mathrm{m/s} = 45{,}4752\,\mathrm{km/h}$$

Größter relativer Fehler Bei diesem einfachen aber ungenauen Verfahren berücksichtigt man nur den größen relativen Fehler.

$$\Delta s = \frac{0{,}5}{48} \approx 0{,}0104 = 1{,}04\% \qquad \Delta t = \frac{0{,}1}{3{,}8} \approx 0{,}0263 = 2{,}63\%$$

Den größten Fehler hat die Zeitmessung, also benutzen wir diesen Wert. $v = 45{,}4752 \pm 2{,}63\%\,\mathrm{km/h}$.

Aber ist jetzt die Angabe der Geschwindigkeit auf sechs Stellen genau noch sinnvoll? Natürlich nicht, da mit 2,63% schon die dritte Stelle vom Fehler betroffen ist. Auch die Angabe des Fehlers auf drei Stellen ist notwendig. Daher schreiben wir $v = 45{,}5 \pm 2{,}6\%\,\mathrm{km/h}$.

Anschaulicher ist oft der absolute Fehler. Wir rechnen also $45{,}5\,\mathrm{km/h} \times 0{,}026 \approx 1{,}2\,\mathrm{km/h}$ und erhalten $v = 45{,}5 \pm 1{,}2\,\mathrm{km/h}$.

Multiplikation relativer Fehler In unserem Beispiel ist der Unterschied zwischen beiden Fehlern nicht so groß, dass wir den kleineren Fehler vernachlässigen könnten. Daher multiplizieren wir die beiden relativen Fehler miteinander und erhalten den Gesamtfehler. Aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir, dass die absoluten Fehler 1,04% und 2,63% betragen. Wir rechnen also $1{,}0104 \times 1{,}0263 \approx 1{,}0370$ und erhalten einen kombinierten Fehler von 3,70%.

Daraus folgt: $v = 45{,}5 \pm 3{,}7\%\,\mathrm{km/h} = 45{,}5 \pm 1{,}7\,\mathrm{km/h}$

Dieses Verfahren kann bei mehreren Größen sehr schnell zu großen Fehlern führen und ist eine ziemlich pessimistische Abschätzung.

Min-Max-Methode Bei dieser Methode werden die absoluten Fehler betrachtet und bei zwei Rechnungen der größte Wert und der kleinste Wert des Ergebnisses berechnet.

Zuerst werden für die einzelnen Messwerte der minimale und der maximale Wert berechnet.

$s = 48 \pm 0{,}5\,\mathbf{m} \Rightarrow s_{\min} = 47{,}5\,\mathbf{m} \quad s_{\max} = 48{,}5\,\mathbf{m}$

$t = 3{,}8 \pm 0{,}1\,\mathbf{s} \Rightarrow t_{\min} = 3{,}7\,\mathbf{s} \quad t_{\max} = 3{,}9\,\mathbf{s}$

Und dann werden die minimale und die maximale Geschwindigkeit berechnet. Dabei hängt die Verwendung des minimalen oder maximalen Wertes auch davon ab, ob dieser im Zähler oder im Nenner eines Bruches steht.

$$v_{\min} = \frac{s_{\min}}{t_{\max}} = \frac{47{,}5\,\mathrm{m}}{3{,}9\,\mathrm{s}} \approx 12{,}18\,\mathrm{m/s} \approx 43{,}8\,\mathrm{km/h} \qquad v_{\max} = \frac{s_{\max}}{t_{\min}} = \frac{48{,}5\,\mathrm{m}}{3{,}7\,\mathrm{s}} \approx 13{,}11\,\mathrm{m/s} \approx 47{,}2\,\mathrm{km/h}$$

Der Mittelwert von $v_{\min}$ und $v_{\max}$ ist 45,5km/h. Die Hälfte der Differenz von $v_{\min}$ und $v_{\max}$ ist dann der absolute Fehler. In diesem Beispiel also 1,7 km/h. Wir erhalten für die Geschwindigkeit $v == 45{,}5 \pm 1{,}7\,\mathrm{km/h}$ das gleiche Ergebnis, wie aus dem vorherigen Verfahren.

Aufgaben

A 1.13. Aus $5 \pm 0{,}1\,\mathrm{m}$ Höhe wurde mehrfach ein Ball fallen gelassen und die Fallzeit bestimmt. Dabei wurden folgende Werte gemessen.

Versuch	1	2	3	4	5
t [s]	1,20	1,18	1,15	1,09	1,07

a) Bestimmen Sie die Fallzeit.
b) Schätzen Sie den Fehler für die Fallzeit ab. Gehen Sie davon aus, dass die tatsächliche Fallzeit bei jedem Versuch gleich war.
c) Berechnen Sie die Fallbeschleunigung aus den Messwerten.
d) Führen Sie für die Berechnung eine Fehlerbetrachtung durch.

A 1.14. Erläutern Sie den Unterschied zwischen einem statistischen und einem systematischen Fehler.

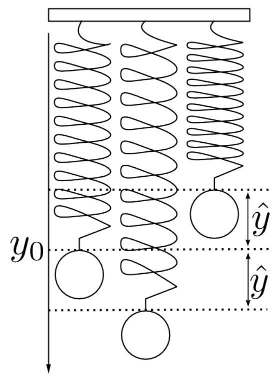
A 1.15. Beim Sportfest des 12. Jahrgangs am Athenaeum gibt es ein Rennen über 100 m. Der Schüler Benedikt startete die Stoppuhr, als er den Schuss hörte und stoppte sie, als sein Läufer die Ziellinie erreicht hatte. Er maß eine Zeit von $t = 11{,}98\,\mathrm{s}$.

a) Erläutern Sie den systematischen Fehler dieser Messmethode.
b) Berechnen Sie die Zeit, die Benedikt eigentlich hätte messen müssen.
c) Der Fehler beim Erkennen des Zieleinlaufs liegt bei $\pm 15\,\mathrm{cm}$. Die Zeitmessung hat einen Fehler von $\pm 0{,}1\,\mathrm{s}$. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit und betrachen Sie den Fehlern.

A 1.16. An einen Kohleschicht-Widerstand mit den Ringfarben Gelb-Lila-Braun-Gold wird eine Spannung $U = 12 \pm 0{,}1\,\mathrm{V}$ angelegt. Berechnen Sie die Stromstärke I und führen Sie eine Fehlerbetrachtung durch.

2 Das Feder-Masse-Pendel

Ein einfaches Federpendel besteht aus einer Feder und einer angehängten Masse. Als **Ruhelage** y_0 des Federpendels wird die Position bezeichnet, in der Gewichtskraft und Federkraft sich ausgleichen. Ein in der Ruhelage freigegebenes Federpendel schwingt nicht. Als **Elongation** y bezeichnet man die aktuelle Entfernung des Pendels von der Ruhelage. Als **Amplitude** $\hat{y}$ bezeichnet man die größte Elongation der Schwingung. Der Begriff **Periode** bezeichnet eine Schwingung von einer Amplitude zur anderen und zurück. Die **Periodendauer** bezeichnet die dafür benötigte Zeit. Die **Frequenz** gibt an, wieviele Perioden pro Zeiteinheit durchlaufen werden.



2.1 Versuch zur Bestimmung der Periodendauer des Feder Masse-Pendels

Material: 2 unterschiedliche Stahlfedern, 4 Massestücke (50 g), Maßstab, Stoppuhr, Stativmaterial (Stange, Halter, Haken)

Durchführung

1. Bauen Sie aus dem Stativmaterial einen Halter für die Feder.
2. Hängen Sie nacheinander die Federn an den Halter und bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Federkonstanten der Federn. Beschreiben Sie Ihr Vorgehensweise.
3. Hängen Sie eine Masse von 50 g an eine Feder und versetzen Sie das System in eine leichte Schwingung. Messen Sie die Periodendauer des Systems möglichst genau. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
4. Beobachten Sie über einen längeren Zeitraum (z.B. 2 Minuten) das Verhalten der Amplitude (maximale Auslenkung) und notieren Sie Ihre Beobachtung.
5. Untersuchen Sie, ob die Amplitude Auswirkungen auf die Periodendauer der Schwingung besitzt. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
6. Bestimmen Sie Periodendauer T des schwingenden Systems mit den jeweils angehängten Massen 50 g, 100 g, 150 g und 200 g.
7. Untersuchen Sie nun, wie oben beschrieben, auch das Schwingungsverhalten der zweiten Feder.

Auswertung

Zur Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs zwischen der Periodendauer T und der Masse m bzw. der Federkonstante D bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

1. Berechnen Sie für die bestimmten Periodendauern T die dazugehörigen Frequenzen f.
2. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $T(m)$ und $f(m)$ und untersuchen Sie die Graphen auf Proportionalität.
3. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $T^2(m)$ und $f^2(m)$ und untersuchen Sie die Graphen auf Proportionalität.
4. Formulieren Sie ein Gesetz, wie die Periodendauer von der angehängten Masse abhängt. (z. B. ... ist proportional/antiproportional zu ...)
5. Untersuchen Sie die Auswirkung der Federkonstanten auf die Periodendauer. Formulieren Sie ein Gesetz, wie die Periodendauer von der Federkonstanten abhängt.
6. Fassen Sie ihre Ergebnisse zusammen und formulieren Sie ein Gesetz, wie die Periodendauer von Masse und Federkonstante abhängt. Berücksichtigen Sie dabei die Existenz eines konstanten Faktors.

2.2 Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs aus Messdaten

Beispiel 2.1. Für ein Feder-Masse-Pendel wurde in einem Experiment die Periodendauer T in Abhängigkeit von der Masse m bestimmt. Die Messergebnisse sind in Tabelle 2.1 links aufgeführt. Die Aufgabe ist es nun den funktionalen Zusammenhang $T(m)$ zu bestimmen.

m [g]	50	100	150	200	250
T [s]	0,63	0,89	1,09	1,26	1,40

D [N/m]	1	2	3	4	5
T [s]	2,81	1,99	1,62	1,40	1,26

Tabelle 2.1: Schwingungsdauer eines Feder-Masse-Pendels; links: Federkonstante $D = 5\,\mathrm{N/m}$, Masse veränderlich; rechts: Masse $m = 200\,\mathrm{g}$, Federkonstante veränderlich

Quotientengleichheit: $T(m) = k \cdot m$ Bei einem proportionalen Zusammenhang zwischen T und m müsste der Quotient $k = \frac{T}{m}$ für alle Messwerte fast gleich sein. Die Schwankungen der Werte der Quotienten muss statisch verteilt sein und keine Tendenz aufweisen.

Produktgleichheit: $T(m) = \frac{k}{m}$ Bei einem antiproportionalen Zusammenhang zwischen T und m müsste das Produkt $k = T \cdot m$ für alle Messwerte fast gleich sein. Die Schwankungen der Werte der Produkte muss statisch verteilt sein und keine Tendenz aufweisen.

Erweiterte Quotientengleichheit: $T(m) = k \cdot m^a$ Ist der funktionale Zusammenhang zwischen T und m eine Potenzfunktion, dann müsste der Quotient $k = \frac{T}{m^a}$ für alle Messwerte fast gleich sein. Die Schwankungen der Werte der Quotienten muss statisch verteilt sein und keine Tendenz aufweisen.

Bei diesen Tests müssen Sie die Exponenten raten und dann auf die Quotientengleichheit testen.

Sinnvolle Ansätze sind m^2, m^3, m^{-2}, m^{-3}, $m^{0,5} = \sqrt{m}$, $m^{-0,5} = 1/\sqrt{m}$ etc.

A 2.1. Bestätigen Sie die funktionalen Zusammenhänge $T(m) \sim \sqrt{m}$ und $T(D) \sim \sqrt{\frac{1}{D}}$ mit der erweiterten Quotientengleichheit aus den Daten von Beispiel 2.1.

A 2.2. Bestätigen Sie die funktionalen Zusammenhänge $T(m) \sim \sqrt{m}$ und $T(D) \sim \sqrt{\frac{1}{D}}$ mit der Regressionsfunktion ihres GTR bzw. CAS-Systems aus den Daten von Beispiel 2.1.

3 Herleitung der Periodendauer des Feder-Masse-Pendels

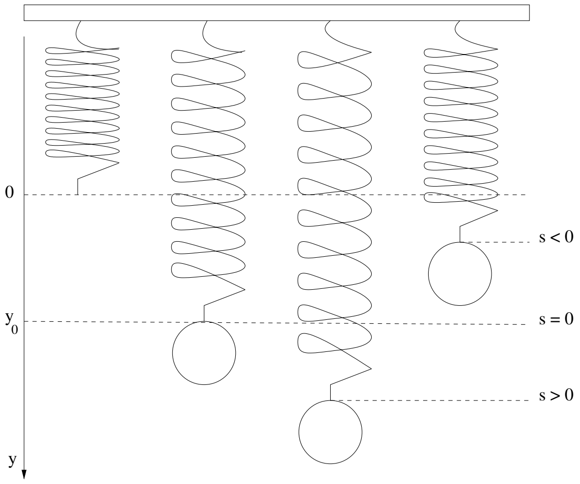


Abbildung 3.1: Verschiedene Situationen des Federpendels

Ein Federpendel besteht aus einer Feder mit der Federkonstanten D und der Grundlänge l_0 sowie aus einer angehängten Masse m. Die Feder wird im Ruhezustand durch die Masse auf die Länge l_0+y_0 ausgedehnt. Da die Grundlänge der Feder für unsere Betrachtungen keine Rolle spielt, betrachten wir nur noch die Längenänderung y, deren Nullpunkt das Ende der unbelasteten Feder ist.

Die resultierende Kraft aus Gewichts- und Federkraft bezeichnet man als rücktreibende Kraft F_R, die immer in Richtung der Ruhelage wirkt. Sie ergibt sich beim Fadenpendel aus der Differenz von Gewichtskraft ($F_G = m \cdot g$) und Federkraft ($F_F(y) = D \cdot y$). Für den Ruhepunkt y_0 gilt dann die Kräftegleichung:

$$F_R(y_0) = F_G - F_F(y_0) = 0\,\mathrm{N} \tag{3.1}$$

Bei einem schwingenden System ändert sich die Länge der Feder laufend mit der Zeit. Es gilt:

$$F_R(t) = F_G - F_F(t) = F_G - D \cdot y(t) \tag{3.2}$$

Da die Gewichtskraft konstant ist und nicht von der Zeit abhängt, kann sie durch geschickte Wahl des Nullpunkts herausgekürzt werden. Der Nullpunkt wird von dem Ende der entspannten Feder ($y = 0$) auf das Ende der Feder in der Ruhelage ($s = 0$) verschoben: $y(t) = y_0 + s(t)$. Die rücktreibende Kraft ergibt sich dann unter Verwendung von Gleichung 3.1 als:

$$F_R(t) = F_G - (F_F(y_0) + F_F(s(t))) = -D \cdot s(t) \tag{3.3}$$

Drückt man die rücktreibende Kraft durch die allgemeine Kraftformel $F = m \cdot a$ aus, dann gilt:

$$a(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t) \tag{3.4}$$

Die erste Ableitung der Strecke nach der Zeit ist die Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{s}(t)$. [1] Die zweite Ableitung ist die Beschleunigung: $a(t) = \ddot{s}(t)$.

$$\ddot{s}(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t) \tag{3.5}$$

Diese Gleichung wird als Differentialgleichung bezeichnet. Eine Differentialgleichung enthält eine Funktion, sowie eine oder mehrere ihrer Ableitungen.

Diese Differentialgleichung läßt sich durch eine Frage relativ einfach lösen: Welche Funktion ist gleich seiner negativen zweiten Ableitung?

Die Sinusfunktion erfüllt diese Bedingung: $s = A \cdot \sin(kt)$. Die Amplitude A hat als konstanter Faktor keine Auswirkung auf die Ableitung. Er wird daher für die weiteren Betrachtungen weggelassen. Der Faktor k ist so zu wählen, dass bei der Periodendauer T der Sinus einmal durchgelaufen ist: Dann gilt

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{3.6}$$

Und damit die zweite Ableitung:

$$\ddot{s}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 s(t) \tag{3.7}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung 3.5, dann folgt:

$$-\frac{D}{m} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{3.8}$$

Wir formen nach T um und erhalten:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{3.9}$$

[1] Die Ableitung wird allgemein durch ein Apostroph am Funktionszeichen dargestellt. Bei der Ableitung nach der Zeit ist ein Punkt über dem Größenzeichen üblich.

4 Formelanalyse - Periodendauer des Federpendels

4.1 Die Formel

Für die Periodendauer eines Federpendels gilt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{4.1}$$

mit	T	Periodendauer	$[T]$:	s
	D	Federhärte	$[D]$:	$\mathrm{kg\,s^{-2}}$
	m	Masse	$[m]$:	kg

Umgeformt nach D sieht die Formel wie folgt aus:

$$D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} \tag{4.2}$$

Umgeformt nach m sieht die Formel wie folgt aus:

$$m = D\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \tag{4.3}$$

4.2 Proportionalitäten

Aus der Formel ergeben sich mehrere Proportionalitäten und Schlußfolgerungen.

$$T \sim \sqrt{\frac{m}{D}} \tag{4.4}$$

Die Periodendauer ist proportional zu der Wurzel aus dem Quotienten von Masse und Federhärte.

Die Periodendauer ändert sich nicht, wenn das Verhältnis von Masse zu Federhärte konstant bleibt.

$$T \sim \frac{1}{\sqrt{D}} \qquad m = \text{const.} \tag{4.5}$$

Je härter die Feder, desto kürzer ist die Periodendauer.

$$T \sim \sqrt{m} \qquad D = \text{const.} \tag{4.6}$$

Je größer die Masse, desto länger ist die Periodendauer.

$$D \sim m \qquad T = \text{const.} \tag{4.7}$$

Je größer die Masse ist, desto härter muß die Feder sein um die gleiche Periodendauer zu erreichen.

4.3 Übungen

A 4.1. Aus einem Auto (m = 1,2 t) wurden die Stoßdämpfer und Federn ausgebaut. Um eine der vier gleichen Autofedern zu untersuchen, setzt sich ein Schüler ($m = 60\,kg$) auf die Feder. Wenn seine Füße nicht den Boden berühren, wird die Feder um 4 cm eingedrückt.

a) Bestimmen Sie die Federhärte der Feder.
b) Berechnen Sie, wie weit das Auto die Federn zusammendrückt.
c) Nur die Federn wurden wieder ins Auto eingebaut. Danach springt ein Schüler auf das Auto und wieder herunter. Bestimmen Sie Periodendauer und Frequenz der Schwingung, die das Auto danach ausführt.
d) Begründen Sie, warum Autos Stoßdämpfer benötigen.

5 Numerische Berechnung des Federpendels

Am Beginn jeder Simulation stehen die Parameter. Im Beispiel des Federpendels sind dies Erstens die Eigenschaften des Pendels (Federhärte D und Masse m), zweitens die Startwerte (Elongation y_0, Geschwindigkeit v_0) und drittens die Simulationseigenschaften (Anzahl der Simulationsschritte N, Schrittweite Δt).

In der Simulation werden in jedem Schritt n, die Werte für die Zeit t, die aktuelle Geschwindigkeit v, die aktuelle Elongation y und die aktuelle rücktreibende Kraft F berechnet. Führen wir die Simulation in einer Tabelle durch, brauchen wir also 5 Spalten.

Schauen wir uns doch mal an, welche Berechnungen für den Schritt mit der Nummer n durchgeführt werden müssen.

Die Berechnung der Zeit $t[n]$ in Schritt n ist einfach: Zu dem vorherigen Zeitpunkt $t[n-1]$ wird einfach die Schrittweite hinzugezählt.

$$t[n] = t[n-1] + \Delta t \tag{5.1}$$

Die Geschwindigkeit $v[n]$ ergibt sich aus der vorherigen Geschwindigkeit $v[n-1]$ und der wirkenden Beschleunigung $a = F/m$ durch die rücktreibenden Kraft $F[n-1]$ aus dem vorherigen Schritt. Hier vereinfachen wir die Simulation und gehen davon aus, dass die wirkende Kraft konstant über die ganze Schrittweite Δt ist.

$$v[n] = v[n-1] + \frac{F[n-1]}{m} \cdot \Delta t \tag{5.2}$$

Die aktuelle Elongation $y[n]$ ergibt sich aus der vorherigen Elongation $y[n-1]$ und der aktuellen Geschwindigkeit $v[n]$. Hier wird wiederum von einer während der Schrittweite Δt konstanten Geschwindigkeit ausgegangen.

$$y[n] = y[n-1] + v[n] \cdot \Delta t \tag{5.3}$$

Als letztes wird dann für den Schritt n die rücktreibende Kraft $F[n]$ berechnet, die für den nächsten Schritt $n+1$ gebraucht wird. Sie ist der aktuellen Elongation $y[n]$ entgegengerichtet.

$$F[n] = -D \cdot y[n] \tag{5.4}$$

A 5.1. Führen sie für folgende Parameter die Simulation händisch durch und tragen Sie die Werte in die unten stehende Tabelle ein.

Federkonstante D	10	N/m
Masse m	1	kg
Start Elongation y_0	1	m
Start Geschwindigkeit v_0	0	m/s
Schrittweite Δt	0,05	s
Anzahl Schritte N	10	

Schritt n	Zeit t	Geschwindigkeit v	Elongation y	Kraft F
1	0	0	1,000	
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

6 Eigenschaften des harmonischen Oszillators

Am Beispiel des Federpendels soll die Energie des harmonischen Oszillators betrachtet werden. Als erstes ein Überblick über die bekannten Fakten:

Die zeitabhängige Elongation eines harmonischen Oszillators entspricht einer Sinuskurve.

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin \omega t \tag{6.1}$$

Da die Geschwindigkeit v die erste Ableitung und die Beschleunigung a die zweite Ableitung der Elongation nach der Zeit darstellen folgt:

$$v(t) = \dot{y}(t) = \omega\hat{y} \cdot \cos \omega t \tag{6.2}$$

$$a(t) = \ddot{y}(t) = -\omega^2\hat{y} \cdot \sin \omega t \tag{6.3}$$

Die Periodendauer ist unabhängig von der Amplitude.

Und damit auch Frequenz und Winkelgeschwindigkeit:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}\,;\; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}\,;\; \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{6.4}$$

Die rücktreibende Kraft ist proportional und engegengesetzt zur Elongation.

$$F_R = -D \cdot y \tag{6.5}$$

6.1 Energien

Der harmonische Oszillator hat zwei besondere Zustände. Diese sind die Ruhelage und die Amplitude. In der Ruhelage gibt es keine rücktreibende Kraft, da dort alle Kräfte ausgeglichen sind. Um das Pendel aus seiner Ruhelage zu bringen, muss gegen die rücktreibende Kraft entgegengearbeit werden. Es wird potentielle Energie aufgebaut. In der Ruhelage selbst ist diese potentielle Energie gleich Null, dafür befindet sich das Pendel in Bewegung. In der Amplitude stoppt das Federpendel kurzzeitig. Seine Geschwindigkeit und damit seine kinetische Energie sind dann Null. Dafür ist hier die potentielle Energie am größten. Da in einem abgeschlossenen System keine Energie verloren geht (ungedämpfter Harmonischer Oszillator) ist die Energiemenge konstant.

$$'E = E(t)_{\text{pot}} + E(t)_{\text{kin}} = \text{const.} \tag{6.6}$$

Dabei gilt für die Energien:

$$\text{Bewegungsenergie: } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.7}$$

$$\text{Spannenergie: } E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Dy^2 \tag{6.8}$$

Störend ist, dass die potentielle Energie von D und y abhängt und die kinetische Energie von m und v. Ersetzen wir in Gleichung 6.7 die Geschwindigkeit durch Gleichung 6.2, dann erhalten wir:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2\cos^2\omega t \tag{6.9}$$

Aus Gleichung 6.4 erhalten wir für die Federhärte $D = m\omega^2$ und setzen dies ein.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\hat{y}^2\cos^2\omega t \tag{6.10}$$

Mit der trigonometrischen Formel $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ können wir umformen und erhalten.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\hat{y}^2\left(1 - \sin^2\omega t\right) = \frac{1}{2}D\left(\hat{y}^2 - \hat{y}^2\sin^2\omega t\right) \tag{6.11}$$

Ersetzen wir die Sinusfunktion mit der Elongation (Gleichung 6.1), dann folgt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\left(\hat{y}^2 - y(t)^2\right) \tag{6.12}$$

Da die Gesamtenergie $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ konstant bleibt, folgt:

$$E = \frac{1}{2}Dy(t)^2 + \frac{1}{2}D\left(\hat{y}^2 - y(t)^2\right) = \frac{1}{2}D\hat{y}^2 \tag{6.13}$$

A 6.1. Eine Feder mit der Federkonstante $D = 10\,\text{N/m}$ der Länge $s_e = 20\,\text{cm}$ im entspannten Zustand wird senkrecht aufgehängt und eine Masse von $m = 400\,\text{g}$ wird angehängt. Das Feder-Masse-System wird nun um 20 cm aus der Ruhelage nach unten ausgelenkt und dann losgelassen.

a) Berechne die Länge der gesamten Feder, wenn sich das System in der Ruhelage befindet.
b) Bestimme die Periodendauer des schwingenden Systems.
c) Gebe die Amplitude dieses schwingenden Systems an.
d) Bestimme die rücktreibende Kraft in der Amplitude und in der Ruhelage.
e) Berechne die Energie des schwingenden Systems.
f) Bestimme die Geschwindigkeit in der Amplitude und in der Ruhelage.

7 Reagenzglaspendel

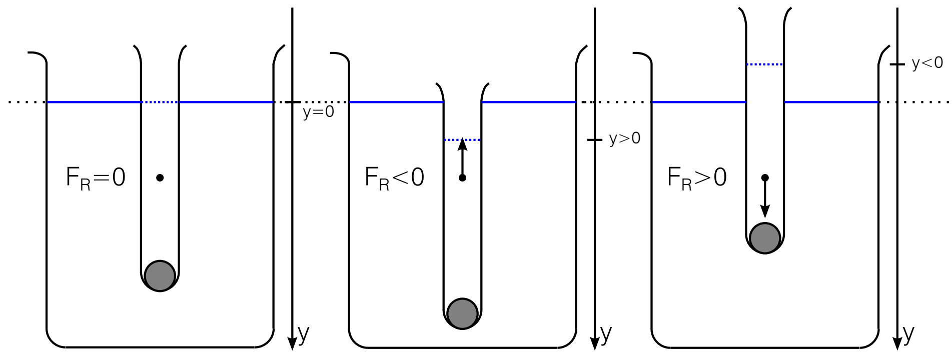


Abbildung 7.1: Rücktreibende Kräfte beim Reagenzglaspendel

Beim Reagenzglaspendel (RGP) wirken die Gewichtskraft F_G und die Auftriebskraft $F_\mathrm{A}(s)$ gegeneinander. Die Auftriebskraft nimmt dabei mit der Eintauchtiefe s zu. In der Ruhelage heben sich die beiden Kräfte auf. Wie schon beim Federpendel können wir durch den Wechsel der Ortsbeschreibung von der Eintauchtiefe s zur Elongation y (Abweichung von der Ruhelage) die Gewichtskraft F_G aus der Betrachtung entfernen. Damit können wir die rücktreibende Kraft $F_\mathrm{R}(y)$ als die Differenz zwischen der aktuellen Auftriebskraft $F_\mathrm{A}(y)$ und der Auftriebskraft in der Ruhelage $F_\mathrm{A}(y = 0)$ betrachten. Diese hängt von der Änderung der verdrängten Wassermasse $m(y)$ und diese wiederum von der Änderung des verdrängten Wasservolumens $V(y)$ ab. Mit ρ für die Dichte des Wassers folgt:

$$F_\mathrm{R}(y) = \Delta F_\mathrm{A}(y) = -g \cdot m(y) = -\rho \cdot g \cdot V(y) \quad (7.1)$$

Das Volumen der Verdrängung entspricht dabei einem Zylinder der Höhe y und der Fläche A: $V(y) = A \cdot y$. Damit folgt:

$$F_R(y) = -A \cdot \rho \cdot g \cdot y \quad (7.2)$$

Damit handelt es sich um einen harmonischen Oszillator, da die rücktreibende Kraft negativ proportional zur Elongation ist. Wenn wir die rücktreibenden Kräfte von RGP und Federpendel gleichsetzen, erhalten wir eine fiktive Federkonstante für das RGP.

$$-D \cdot y = -A \cdot \rho \cdot g \cdot y \Longrightarrow D = A \cdot \rho \cdot g \quad (7.3)$$

Damit folgt für die Periodendauer T analog zum Federpendel.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{A\rho g}} \quad (7.4)$$

Und für die Frequenz f

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A\rho g}{m}} \quad (7.5)$$

Die Energie ergiebt sich dann als

$$E = \frac{1}{2}D\hat{y}^2 = \frac{1}{2}A\rho g\hat{y}^2 \quad (7.6)$$

7.1 Aufgaben

A 7.1. Ein Reagenzglas mit der Masse 50 g und einem Durchmesser von 1,4 cm schwimmt in einem Wasserbecken. Durch einen Stupser wird es etwas nach unten gedrückt. Bestimmen Sie die Periodendauer und Frequenz der Schwingung, die das Reagenzglas durchführt.

A 7.2. Eine zylinderförmige Boje mit der Masse 80 kg und einem Durchmesser von 40 cm schwimmt aufrecht auf der Elbe. Durch Wind und Wellenschlag wird sie zu Schwingungen angeregt. Bestimmen Sie die Periodendauer und Frequenz der Schwingung, die die Boje durchführt.

A 7.3. Professor Phisigma ist ans Tote Meer gefahren. In einem Glas Trinkwasser bringt er ein Reagenzglas zum Schwingen. Dann nimmt er das Reagenzglas mit ins Wasser des Toten Meers. Beschreiben Sie, wie sich die Schwingungsdauer des Reagenzglases im Toten Meer im Vergleich zur Schwingung im Trinkwasser ändert.

8 Schwerependel

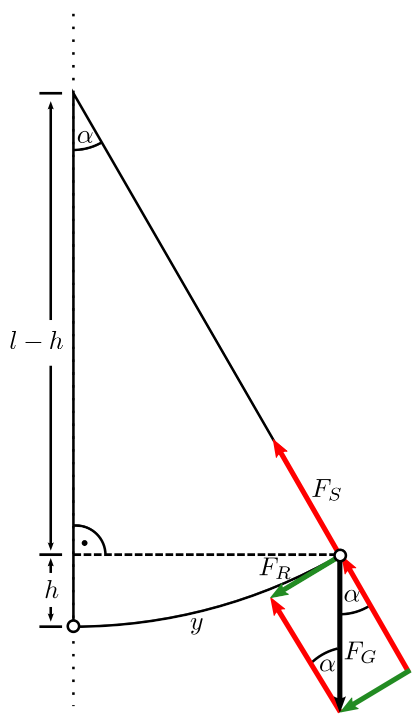
Eine einfache Version eines Schwerependels ist das Fadenpendel, dass aus einem dünnen Faden und einer angehängten Masse besteht. Als **Ruhelage** des Fadenpendels wird die Position bezeichnet, in der der Faden senkrecht nach unten zeigt.

8.1 Versuch zur Bestimmung der Periodendauer

Material: 120 cm Schnur, 4 Massestücke (50 g), Maßstab, Stoppuhr, Stativmaterial (Stange, Halter, Haken)

Durchführung

1. Bauen Sie aus dem Stativmaterial einen Halter für das Fadenpendel. Bringen Sie die Schnur auf eine Länge von ca. 50 cm (Knoten - nicht schneiden) und hängen Sie eine Masse von 50 g an die Schnur. Stellen Sie eine Hypothese über die effektive Länge des Schwerependels auf und stellen Sie diese Hypothese dem Betreuer vor.
2. Bringen Sie das System in Schwingung und untersuche Sie, ob die Amplitude Auswirkungen auf die Periodendauer der Schwingung besitzt. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und Ihre Beobachtungen.
3. Bestimmen Sie Periodendauer T und Frequenz f des Fadenpendels mit den jeweils angehängten Massen 50 g, 100 g, 150 g und 200 g. Benutzen Sie nur kleine Amplituden für die Untersuchung.
4. Zeichnen Sie die Graphen von $T(m)$ und $f(m)$ und untersuchen Sie sie auf Proportionalität.
5. Untersuchen Sie nun die Auswirkungen der effektiven Länge l des Fadenpendels auf die Periodendauer. Benutzen Sie eine Masse von 50 g und varieren Sie die Länge der Schnur von 10 cm bis 80 cm. Benutzen Sie nur kleine Amplituden für die Untersuchung.
6. Schätzen Sie den Messfehler für die gemessene Periodendauer T und die effektive Länge l ab.
7. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $T(l)$ und $f(l)$ und markieren sie den Fehlerbereich für jeden Messpunkt. Untersuchen Sie die Graphen auf Proportionalität.
8. Führen Sie die vorherige Aufgabe mit $T^2(l)$ und $f^2(l)$ durch. Achten Sie auf den Fehlerbereich.
9. Ermitteln Sie den funktionalen Zusammenhang $T(l)$ unter Verwendung des GTRs.
10. Formulieren Sie ein Gesetz für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels.
11. Ein Sekundenpendel, wie sie z. B. in Uhren eingesetzt werden, braucht für eine Halbschwingung eine Sekunden. Bestimmen Sie experimentell die dafür benötigte Fadenlänge.



Sätze für das rechtwinklige Dreieck
Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Den Quotienten aus Gegenkathete und Hypotenuse bezeichnet man als Sinus des Winkels.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Den Quotienten aus Ankathete und Hypotenuse bezeichnet man als Cosinus des Winkels.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

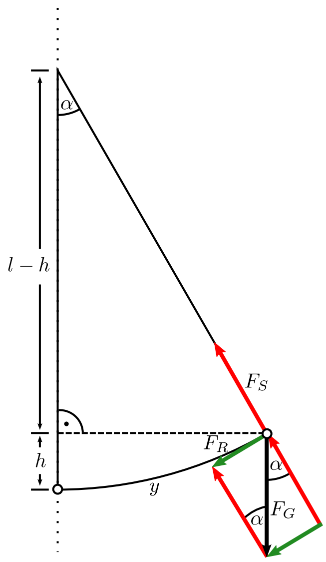
Den Quotienten aus Gegenkathete und Ankathete bezeichnet man als Tangens des Winkels.

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Abbildung 8.1: Rückstellkraft beim Schwerependel

8.2 Herleitung

In der Ruheposition hebt die Scheinkraft der Schnur F_S die Gewichtskraft F_G auf. Wird das Pendel um den Winkel α aus der Ruhelage ausgelenkt, sind Schnur und Gewichtskraft nicht mehr parallel. Die Schnurkraft kann deshalb die Gewichtskraft nicht mehr völlig ausgleichen. Die Differenz beider Kräfte ist die Rückstellkraft F_R. Die Rückstellkraft steht dabei senkrecht zur Schnurkraft. Die drei Kräfte bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit F_G als Hypotenuse und F_S und F_R als Katheten. Der Auslenkwinkel α findet sich zwischen der Gewichtskraft und dem Schnurkraft wieder.



Wir müssen noch berücksichtigen, dass die Richtung des Winkels α entgegengesetzt zur Rückstellkraft F_R steht. Daher gilt:

$$\sin\alpha = -\frac{F_R}{F_G} \Longrightarrow F_R = -F_G \cdot \sin\alpha \tag{8.1}$$

Das Massestück legt beim Pendel einen Kreisbogen zurück. Dies ist die Elongation y. Für die Elongation gilt, wenn α im Bogenmaß angegeben wird:

$$\alpha = \frac{y}{l} \tag{8.2}$$

Wir fügen zusammen und erhalten:

$$F_R = -F_G \cdot \sin\frac{y}{l} \tag{8.3}$$

Damit ist das Schwerependel kein Harmonischer Oszillator. Die Periodendauer hängt von der Amplitude ab, da die Rückstellkraft nicht proportional zur Elongation ist.

Mit einem Trick kann man aber das Schwerependel doch zu einem Harmonischen Oszillator machen. Wenn das Schwerependel nur leicht ausgelenkt wird, so dass der Amplitudenwinkel kleiner als 5° bleibt, können wir eine Näherung für den Sinus verwenden. Es gilt $\sin\alpha \approx \alpha$, wenn α im Bogenmaß verwendet wird. Dann gilt:

$$F_R = -\frac{F_G}{l} \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y \tag{8.4}$$

Damit ergibt sich eine fiktive Federhärte

$$F_R = -D \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y \Longrightarrow D = \frac{m \cdot g}{l} \tag{8.5}$$

Dann folgt für die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8.6}$$

und für die Energie

$$E = \frac{1}{2}D\hat{y}^2 = \frac{mg}{2l}\hat{y}^2 = \frac{1}{2}lmg\hat{\alpha}^2 \tag{8.7}$$

8.3 Anwendung des Schwerependels

A 8.1. Eine Kirchturmuhr in Stade ($g = 9{,}8128\,\mathrm{m/s^2}$) wird über ein Pendel gesteuert. Die Uhr ist so gebaut, dass bei jedem Durchgang durch die Ruhelage der Sekundenzeiger um genau eine Sekunde weiter geht. Bestimme die Länge des Pendels.

A 8.2. Eine Kuckucksuhr hat eine effektive Pendellänge von 7 cm. Bestimme die Periodendauer für Stade und Zürich ($g = 9{,}8067\,\mathrm{m/s^2}$) und vergleiche die beiden Werte miteinander.

A 8.3. Um den Ortsfaktor von Wien zu bestimmen wird ein Schwerependel mit einer exakten Längen von 1,000 000 m Länge aufgestellt. Für 10 000 Perioden wurde eine Zeit von 20 062,10 s gemessen. Berechne den Ortsfaktor von Wien.

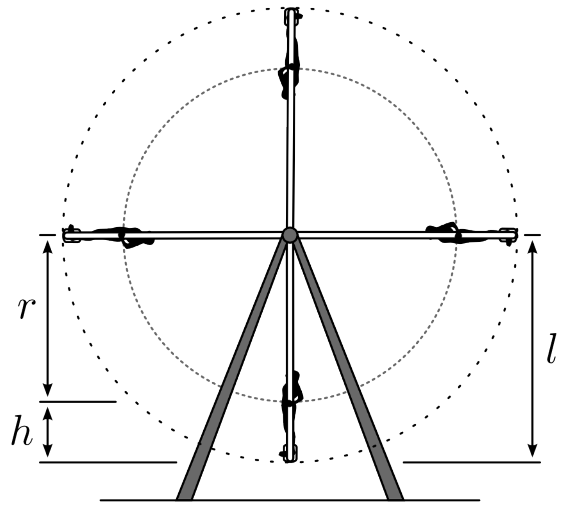
A 8.4. Ein hochpräzises Schwerependel wird von einem Geologen zur Rohstoffsuche verwendet. Erläutern Sie, wie der Geologe mit dem Schwerependel das mögliche Vorkommen eines Öllagers und eines Eisenerzlagers unter seinen Füßen erkennen und unterscheiden kann.

9 Extremsport Kiiking

Kiiking ist eine Estnische Extremsportart, die 1996 von Ado Kosk eingeführt wurde. Die Schaukel (estnisch: kiik) ist in Estland ein sehr beliebtes Sportgerät. Im Gegensatz zu den in Deutschland gebräuchlichen Schaukeln wird in Estland im Stehen und mit mehreren Leuten zusammen geschaukelt. Diese Schaukeln habe extra eine Sperre, damit die Schaukel sich nicht überschlägt. Genau dies ist aber das Ziel beim Kiiking.

Die Schaukeln bestehen aus Stahl und ermöglichen eine 360° -Drehung. Sie sind in der Höhe verstellbar. Die Sportlerin oder der Sportler wird mit den Füßen auf der Schaukel festgebunden und meistens werden auch die Hände mit Bändern gesichert.

Aufgabe der Person auf der Schaukel ist es nun das System zu erregen, damit die Amplitude zunimmt. Gleichzeitig ist die Schwingung durch Reibungsprozesse auch gedämpft. Ein Teil der zugeführte Energie geht damit für die Bewegung verloren. Am Anfang beginnt die Person durch Verschieben des Körperschwerpunkts hinter die Schaukel bei der Vorwärtsbewegung und vor die Schaukel bei der Rückwärtsbewegung das System zu erregen. Hat sich die Schaukel in Bewegung gesetzt, wechselt die Bewegungsart. Ist die Schaukel in der Waagerechten, so geht die Person in die Hocke. Erreicht die Schaukel den tiefsten Punkt, dann richtet sich die Person auf. Dabei muss sie Arbeit gegen die Gravitations- und die Zentripetalkraft leisten. Dadurch wird dem System Energie hinzugeführt. Ziel ist es durch den richtigen Rythmus der Schaukel ein solches Bewegungsmoment zu geben, dass die Schaukel sich überschlägt. Dies ist um so schwerer, je länger die Schaukel wird. Wer den Überschlag mit der längsten Schaukel schafft, hat gewonnen. Der Rekord liegt knapp über 7 m.



A 9.1. Der estnische Extremsportler Kuldar Kiirendus ist ca. 1,80 m groß und wiegt 80 kg. Sein Körperschwerpunkt (KSP) liegt auf einer Höhe von $h = 1{,}1\,\text{m}$. Er schaukelt auf einer Kiiking-Schaukel mit einer Länge von $l = 7\,\text{m}$ bis er den Überschlag schafft. Führe alle Rechnungen so durch, als ob sich die Körpermasse vollständig im Körperschwerpunkt befindet. Die Masse der Schaukel ist zu vernachlässigen.

a) Erläutern Sie um was für ein Pendel es sich bei der Schaukel handelt und ob diese ein harmonischer Oszillator ist.

b) Berechnen Sie den Radius r des Kreises, den Kiirendus Körperschwerpunkt bei einer vollständigen Runde mit Überschlag zurücklegt.

c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen tiefstem und höchsten Punkt des KSP und den daraus folgenden Unterschied der potentiellen Energie zwischen den beiden Punkten.

d) Stellen Sie eine Funktion für die potentielle Energie $E_{\text{pot}}(r)$ in Abhängigkeit vom Radius des Kreises des KSP auf.

e) Nehmen Sie an, dass beim Überschlag die Geschwindigkeit im höchsten Punkt vernachlässigbar klein ist. Für die Geschwindigkeit des KSP im tiefsten Punkt gilt dann die Formel: $v = \sqrt{4\,g\,r}$ wobei g für den Ortsfaktor steht. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt.

f) Leiten Sie die Formel $v = \sqrt{4\,g\,r}$ aus einer Energiebetrachtung her.

g) Berechnen Sie die Zentrifugalbeschleunigung, die Kiirendus scheinbar im tiefsten Punkt erfährt.

h) Erläutern Sie, welche Kräfte die Füße von Kiirendus im tiefsten Punkt aushalten müssen. Veranschaulichen Sie den Wert.

i) Im tiefsten Punkt steht Kiirendus auf. Dabei verschiebt sich sein Körperschwerpunkt um 0,5 m in Richtung Drehachse. Bestimmen Sie die dabei verrrichtete Arbeit und damit die Energiezunahme des Schaukel-Systems. Vergleichen Sie den Wert mit der für den Überschlag nötigen Energie.

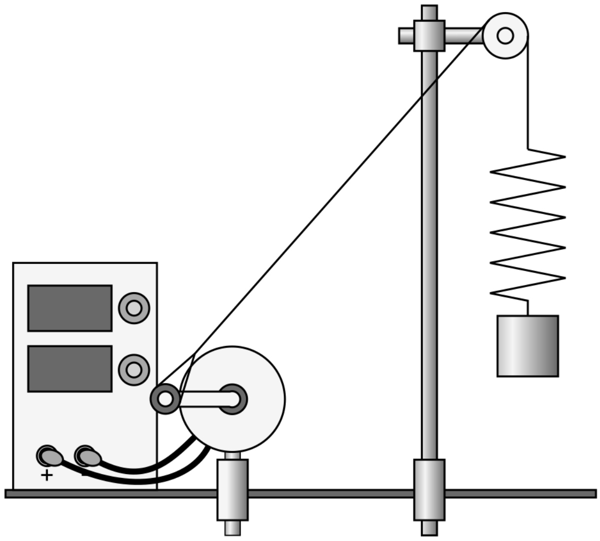
j) Von der leichten Schaukelbewegung bis zum Überschlag muss Kiirendus diesen Vorgang oft wiederholen. Erläutern Sie, warum die bei einem Aufstehen gewonnene Energie nicht konstant über den ganzen Ablauf ist.

10 Dämpfung, Anregung, Resonanz und Eigenfrequenz

Material: Feder, Massestück (200 g), Faden, Dynamot, Netzteil, 2 Laborkabel, 2x Stativhalter, Stativstange, Haken, Behälter mit Wasser

Aufbau:

1. Befestigen Sie die Stativhalter nebeneinander am Tisch. Stecken Sie in den einen Halter den Dynamot und in den zweiten die Stativstange. An der Stativstange befestigen Sie oben den Haken.
2. Binden Sie den Faden an Feder und machen Sie an das andere Ende eine Schlaufe. Diese kommt um die Kurbel des Dynamot. Die Schleife sollte sich bei der Drehung des Kurbel nicht um die Kurbel wickeln, sondern sich frei bewegen.
3. Legen Sie den Faden über den Haken, so dass das Federende über der Mitte der Stativstange ist. Hängen Sie nun das Massestück an die Feder.
4. Schließen Sie den Dynamot mit den Kabeln an das Netzteil an.



Durchführung:

1. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz des Feder-Masse-Pendels.

2. Schalten Sie nun das Netzteil an und erhöhen langsam die Spannung. Beobachten Sie das FMP.

3. Bestimmen Sie die Frequenz, bei der es zu sogenannten Resonanzkatastrophe kommt.

4. Hängen Sie nun das Massestück in den Wasserbehälter und wiederholen den Versuch. Beschreiben Sie das Verhalten des FMP nun.

11 Überlagerung von Schwingungen

A 11.1. Lassen Sie sich die folgende Überlagerung der beiden Sinus-Schwingungen im GTR anzeigen.

$$y(x) = \sin x + \sin(x + k\pi)$$

Setzen Sie für k nacheinander die Werte 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ und 2 ein. Beschreiben Sie die entstehenden Graphen.

A 11.2. Lassen Sie sich die Überlagerung der folgenden Schwingungen im GTR anzeigen.

$$y(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots$$

Setzen Sie die Überlagerungsreihe fort und beschreiben Sie die entstehende Funktion.

A 11.3. Lassen Sie sich die Überlagerung der folgenden Schwingungen im GTR anzeigen.

$$y(x) = \sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \frac{1}{7^2}\sin 7x + \ldots$$

Setzen Sie die Überlagerungsreihe fort und beschreiben Sie die entstehende Funktion.

A 11.4. Lassen Sie sich die Überlagerung der folgenden Schwingungen im GTR anzeigen.

$$y(t) = 1 + \frac{2}{1\cdot 3}\sin 2x - \frac{2}{3\cdot 5}\sin 4x + \frac{2}{5\cdot 7}\sin 6x - \ldots$$

Setzen Sie die Überlagerungsreihe fort und beschreiben Sie die entstehende Funktion.

11.1 Schwebung

Schwebungsfrequenz	$f_S = \lvert f_1 - f_2 \rvert$
Frequenz des Schwebungstons	$f_0 = \frac{f_1+f_2}{2}$

A 11.5. Erläutern Sie an einem Beispiel den Begriff *Schwebung*.

A 11.6. Erläutern Sie, warum die Überlagerung zweier ungedämpfter harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenz keine harmonische Schwingung ist.

A 11.7. Eine Turbine läuft mit einer Frequenz von 400 Hz. Eine zweite baugleiche Turbine wird ebenfalls gestartet. Wenn beide Turbinen laufen hört man 8 Schwebungen in 10 Sekunden. Berechnen Sie mit welcher Frequenz die zweite Turbine läuft.

A 11.8. Es kommt zu einer Überlagerung der Schwingungen

$$s_1 = 4\,\mathrm{cm}\cdot\sin\pi\,\mathrm{s}^{-1}t \qquad \text{und} \qquad s_2 = 3\,\mathrm{cm}\cdot\sin\frac{3}{4}\pi\,\mathrm{s}^{-1}t$$

a) Beschreiben Sie die Bewegung im Zeigerdiagramm.
b) Bestimmen Sie die Zeiten, zu denen sich die Zeiger maximal verstärken und maximal schwächen.
c) Berechnen Sie die Schwebungsfrequenz.

A 11.9. Berechnen Sie mithilfe der Formel

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left((\alpha+\beta)/2\right)\cdot\cos\left((\alpha-\beta)/2\right)$$

die Überlagerungsschwingung der beiden Schwingungen

$$s_1 = s_0\sin\omega t \qquad \text{und} \qquad s_2 = s_0\sin\left(\omega t + \Delta\varphi\right)$$

Interpretieren Sie die Fälle $\Delta\varphi = 0\,, \pi/2\,, \pi$.

12 Wellenfunktion

A 12.1. Vorüberlegungen:

a) Ergänzen sie die Tabelle:

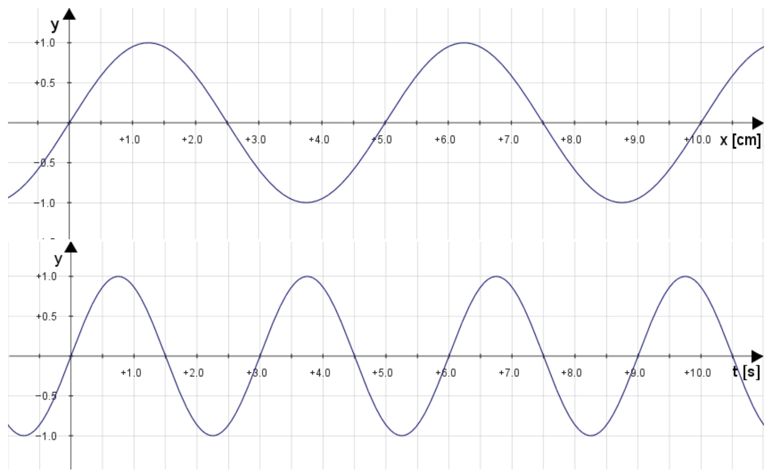
x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$f(x) = \sin x$					

b) Geben Sie die Periodenlänge der Funktion $f(x) = \sin x$ an.

c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin bx$. Bestimmen Sie den Wert für den Parameter b, damit die Periodenlänge 1 ist. Geben Sie b für eine Periodenlänge von 5 an.

d) Geben Sie jeweils eine Formel an, mit der man die Winkelgeschwindigkeit ω einmal durch die Frequenz f und einmal durch die Periodendauer T beschreiben kann.

A 12.2. Für eine Welle wurde einmal ein $y(x)$-Diagramm und ein $y(t)$-Diagramm aufgezeichnet.



a) Bestimmen Sie die Wellenlänge und die Periodendauer der Welle.

b) Stellen Sie die Kurven jeweils durch eine Sinus-Kurve des Typs $y(x) = \sin bx$ bzw. $y(t) = \sin bt$ dar.

c) Überlegen Sie, wie die Funktion $y(x,t)$ aussieht.

A 12.3. Die Schallgeschwindigkeit in der Luft betrage 330 m/s. Bestimmen Sie die Wellenlänge des Kammertons a.

A 12.4. Ein Ton hat in der Luft die Wellenlänge $\lambda = 1{,}26\,\mathrm{m}$. Bestimmen Sie den Ton.

A 12.5. Der Kammerton a hat in einer gespannten Stahlseite die Wellenlänge 1,28 m. Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit in der Stahlseite.

A 12.6. In unserem musikalischen Notensystem verdoppelt sich bei einem Sprung um eine Oktave nach oben die Frequenz. Der Raum ist in 12 Einzeltöne aufgeteilt. Dabei erhöht sich die Frequenz wie folgt.

$$f_{n+1} = f_n \cdot 2^{\frac{1}{12}}$$

Bestimme Sie die Regel, die die Wellenlänge λ_{n+1} des nächsthöheren Tons angibt.

f [Hz]		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
		Prime	Kleine Sekunde	Große Sekunde	Kleine Terz	Große Terz	Reine Quarte	Übermäßige Quarte	Reine Quinte	Kleine Sexte	Große Sexte	Kleine Septime	Große Septime	Oktave	
		A	A#	H	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	
-4	,,,,A	13,75	14,57	15,43	16,35	17,32	18,35	19,45	20,60	21,83	23,12	24,50	25,96	27,50	,,,A
-3	,,,A	27,50	29,14	30,87	32,70	34,65	36,71	38,89	41,20	43,65	46,25	49,00	51,91	55,00	,,A
-2	,,A	55,00	58,27	61,74	65,41	69,30	73,42	77,78	82,41	87,31	92,50	98,00	103,83	110,00	,A
-1	,A	110,00	116,54	123,47	130,81	138,59	146,83	155,56	164,81	174,61	185,00	196,00	207,65	220,00	A
0	A	220,00	233,08	246,94	261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	369,99	392,00	415,30	**440,00**	a
1	a	**440,00**	466,16	493,88	523,25	554,37	587,33	622,25	659,26	698,46	739,99	783,99	830,61	880,00	a'
2	a'	880,00	932,33	987,77	1046,50	1108,73	1174,66	1244,51	1318,51	1396,91	1479,98	1567,98	1661,22	1760,00	a''
3	a''	1760,00	1864,66	1975,53	2093,00	2217,46	2349,32	2489,02	2637,02	2793,83	2959,96	3135,96	3322,44	3520,00	a'''
4	a'''	3520,00	3729,31	3951,07	4186,01	4434,92	4698,64	4978,03	5274,04	5587,65	5919,91	6271,93	6644,88	7040,00	a''''
5	a''''	7040,00	7458,62	7902,13	8372,02	8869,84	9397,27	9956,06	10548,08	11175,30	11839,82	12543,85	13289,75	14080,00	a'''''

13 Gegenläufige Wellen

A 13.1. Zwei Wellen gleicher Frequenz, Wellenlänge und Geschwindigkeit laufen aufeinander zu und überlagern sich. Untersuchen Sie das Wellenfeld im Bereich der Überlagerung.

a) Benutzen Sie die Wellenfunktionen

$$y_r(x,t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \qquad y_l(x,t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t\right) \tag{13.1}$$

für eine nach rechts ($y_r(x,t)$) bzw. eine nach links ($y_l(x,t)$) laufende Welle. Skizzieren Sie den Verlauf der beiden Wellenfunktionen für $\hat{y} = 2\,\mathrm{cm}$, $\lambda = 6\,\mathrm{cm}$ und $T = 6\,\mathrm{s}$ einmal in Abhängigkeit vom Ort zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ und einmal in Abhängigkeit von der Zeit am Ort $x = 3\,\mathrm{cm}$.

b) Die Überlagerung der beiden Wellen $y(x,t)$ ergibt sich aus der Summe der beiden Wellenfunktionen: $y(x,t) = y_r(x,t) + y_l(x,t)$. Verwenden Sie den Zusammenhang

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{13.2}$$

um eine Funktion für die resultierende Welle $y(x,t)$ in Abhängigkeit von Ort und Zeit zu ermitteln. Notieren Sie eine ausführliche Interpretation der resultierenden Wellenfunktion.

c) Lassen Sie sich den Graphen im GTR anzeigen. Verwenden Sie dazu folgende Werte: $\lambda = 1$; $T = 1$; $\hat{y} = 1$; $t = \{0, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2\}$. Durch die geschweiften Klammern zeichnet der GTR jeweils einen neuen Graphen für jeden in der Klammer aufgeführten Wert.

d) Wiederholen Sie die Untersuchung mit den Wellenfunktionen

$$y_r(x,t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad y_l(x,t) = \hat{y}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{13.3}$$

und erläutern Sie den Unterschied zwischen den einzelnen und den resultierenden Wellenfunktionen.

14 Stehende Welle

Eine stehende Welle entsteht aus der Überlagerung zweier gegenläufig laufender Wellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude. Die Wellen stammen aus zwei verschiedenen Erregern oder entstehen durch die Reflexion einer Welle an einem Hindernis.

Zwischen zwei Reflektoren (Wänden) bilden sich keine stehenden Wellen mit beliebiger Wellenlänge. Bei einer Reflektion mit festen Ende ist es vielmehr so, dass an beiden Wänden jeweils ein Schwingungsknoten vorliegen muss. Alle Wellenlängen, die diese Bedingung erfüllen, werden als *Eigenresonanzen* oder *Eigenschwingungen* bezeichnet.

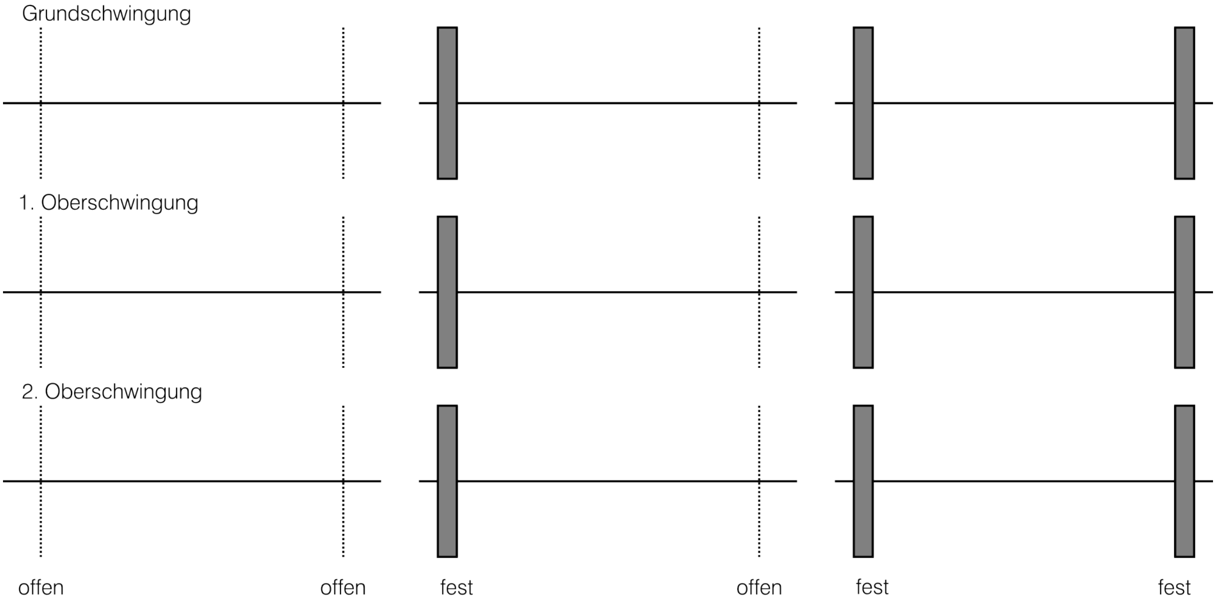


Abbildung 14.1: Mögliche Eigenschwingungen eines Wellenmediums

Wenn die Welle einen Bereich der Länge l für ihre Schwingungen zur Verfügung hat, gilt für die Wellenlängen λ_n der stehenden Welle zwischen zwei festen Enden und zwei offenen Enden die Formel:

$$\lambda_n = \underline{\qquad\qquad} \cdot l \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14.1}$$

Ist die Welle an einem Ende fest und am anderen Ende offen (kann also frei schwingen), dann gilt die Formel:

$$\lambda_n = \underline{\qquad\qquad} \cdot l \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14.2}$$

Stehende Wellen sind z.B. für die Tonentstehung bei Saiteninstrumenten verantwortlich.

A 14.1. Die sechs verschieden dicken Saiten der traditionellen Gitarre sind meistens auf die Grundtöne E, A, d, g, h und e' gestimmt. Die frei schwingende Saitenlänge l einer Gitarre betrage 640 mm.

a) Geben Sie die Frequenzen der Grundtöne an.
b) Bestimmen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit in den einzelnen Saiten!
c) Erläutern Sie, wie sich der Ton einer Saite verändert, wenn diese gespannt oder gelockert wird!
d) Erläutern Sie, wie sich der Ton verändert, wenn die Saite durch Griffe verkürzt wird.
e) Sie wollen den Kammerton a ($f_a = 440{,}00\,\text{Hz}$) spielen. Diskutieren Sie, welche Saite Sie am günstigsten auf welche Länge reduzieren sollten!
f) Sie greifen genau in der Mitte der Seite. Erläutern Sie, wie sich die Frequenz verändert?
g) Bestimmen Sie die möglichen Oberschwingungen der Saiten.

15 Klangröhren

f’	f’	c”	c”	d”	d”	c”
b’	b’	a’	a’	g’	g’	f’
c”	c”	b’	b’	a’	a’	g’
c”	c”	b’	b’	a’	a’	g’
f’	f’	c”	c”	d”	d”	c”
b’	b’	a’	a’	g’	g’	f’

Tabelle 15.1: Um welches Lied handelt es sich hier?

✂

	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	H
c	131	139	147	156	165	175	185	196	208	220	233	247
c’	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494
c”	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988

Tabelle 15.2: Frequenz der Töne in Hertz

✂

Ton	Frequenz [Hz]	Wellenlänge [cm]	Länge [cm]	Farbe
f’				
g’				
a’				
b’				
c”				
d”				
e”				

Tabelle 15.3: Übersichtstabelle über die Klangröhren

✂

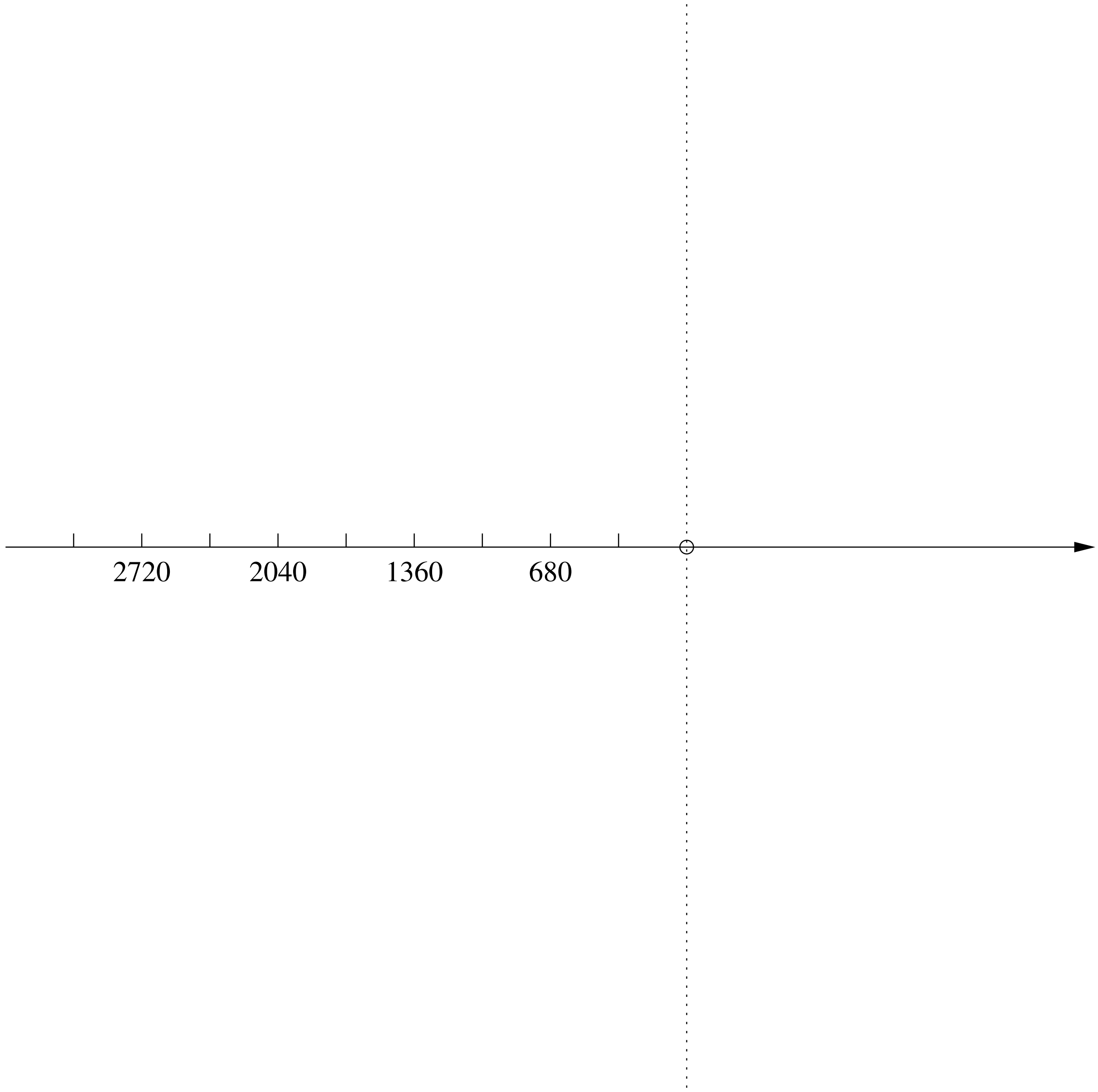
Höchster und niedrigster Ton sind bei den Klangröhren dabei.

16 Dopplereffekt

Nähern sich ein Sender und ein Empfänger, so nimmt der Empfänger eine .... Frequenz war.

Entfernen sich ein Sender und ein Empfänger, so nimmt der Empfänger eine .... Frequenz war.

A 16.1. Eine Schallquelle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 170 m/s geradlinig vorwärts. Der Schall breitet sich mit einer Geschwindigkeit von 340 m/s aus. Der Zeitpunkt Null ist auf der unteren Abbildung durch die gepunktete Linie gekennzeichnet. Zeichnen Sie die Wellenfronten für die letzten 10 Sekunden (für jede Sekunde eine) ein. Berücksichtigen Sie dabei auch die Bewegung der Schallquelle. Interpretieren Sie das Wellenprofil.



Eine Simulation der Ausbreitung der Schallwellen beim Dopplereffekt finden Sie im Internet unter der URL `http://app.phisigma.de` .

16.1 Formeln zum Dopplereffekt

Dopplereffekt Nähern sich Schallquelle und Beobachter, so nimmt der Beobachter eine höhere Frequenz wahr, als die Schallquelle ausstrahlt. Entfernen sie sich voneinander, so verringert sich die Frequenz für den Beobachter.

Beschreibung der Welle durch drei Größen:

- c : Phasengeschwindigkeit
- f : Frequenz
- λ : Wellenlänge

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

16.1.1 Bewegter Beobachter, unbewegte Schallquelle

v : Geschwindigkeit des Beobachters

Luft: λ ist konstant

Phasengeschwindigkeit: $c_D = c \pm v$

Frequenz:

$$f_D = \frac{c \pm v}{\lambda} = f\frac{c \pm v}{c} = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

16.1.2 Bewegte Schallquelle, unbewegter Beobachter

v : Geschwindigkeit des Beobachters

Strecke pro Periode T: $\Delta s = v \cdot T = \frac{v}{f}$

$\Longrightarrow \lambda$ variiert für den Beobachter

Wellenlänge:

$$\lambda_D = \lambda \mp v \cdot T = \lambda \mp v \cdot \frac{\lambda}{c} = \lambda\left(1 \mp \frac{v}{c}\right)$$

Mit $c = \lambda_D \cdot f_D = \lambda \cdot f$ folgt für die Frequenz:

$$f_D = \frac{c}{\lambda_D} = \frac{\lambda \cdot f}{\lambda\left(1 \mp \frac{v}{c}\right)} = \frac{f}{1 \mp \frac{v}{c}}$$

16.2 Übungen

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben eine Schallgeschwindigkeit von 340 m/s an.

A 16.2. Bestimmen Sie den Ton, den ein Beobachter, an dem eine pfeifende Lokomotive (1500 Hz) mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h vorbeifährt, vorher und nachher hört.

A 16.3. Die Hupe eines stehenden Autos besitze eine Frequenz von 440 Hz. Bestimmen Sie die Frequenz, die ein Autofahrer wahrnimmt, der sich mit 100 km/h nähert bzw. entfernt.

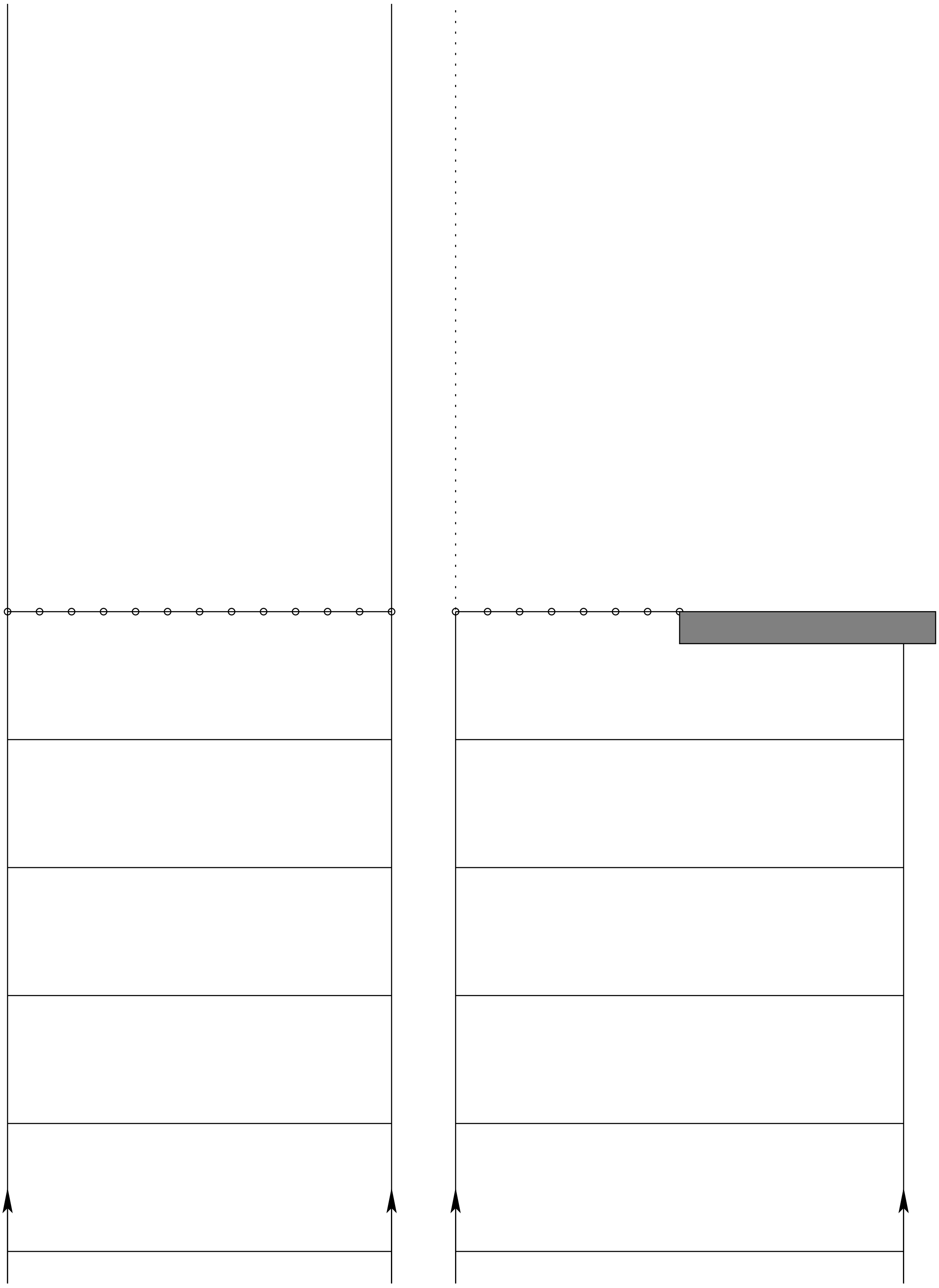
A 16.4. Eine Pfeife mit der Frequenz 400 Hz wird mit 3 Umdrehungen je Sekunde auf einer Kreisbahn mit dem Radius 1 m herumgeschleudert. Ermitteln Sie die Werte, zwischen denen die Frequenz des Tones schwankt, für den Pfeifenschwinger und für einen außenstehenden ruhenden Beobachter.

A 16.5. Erläutern Sie, wie man mit einer Peitsche in der Luft knallen kann.

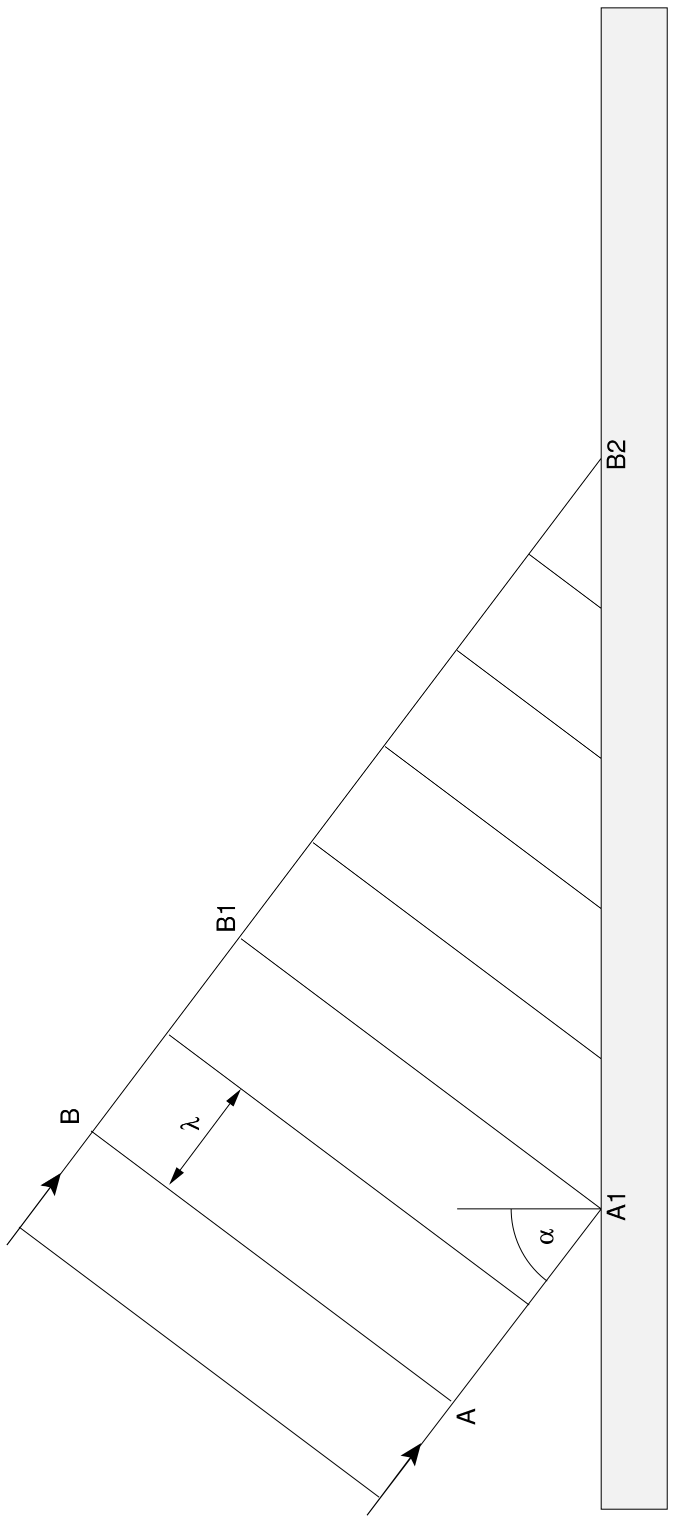
A 16.6. Der Hubschrauber Bell UH-1D wird im Volksmund auch "Teppichklopfer" genannt. Erklären Sie, warum man das charakteristische Klopfen der Rotorblätter nur beim Heranfliegen und nicht beim Wegfliegen hört.

A 16.7. Ein Flugzeug fliegt mit $v = 2c$. Bestimmen Sie den Winkel den seine Kopfwelle einschließt. Veranschaulichen Sie sich das Problem mit den Ihnen bekannten Simulationen.

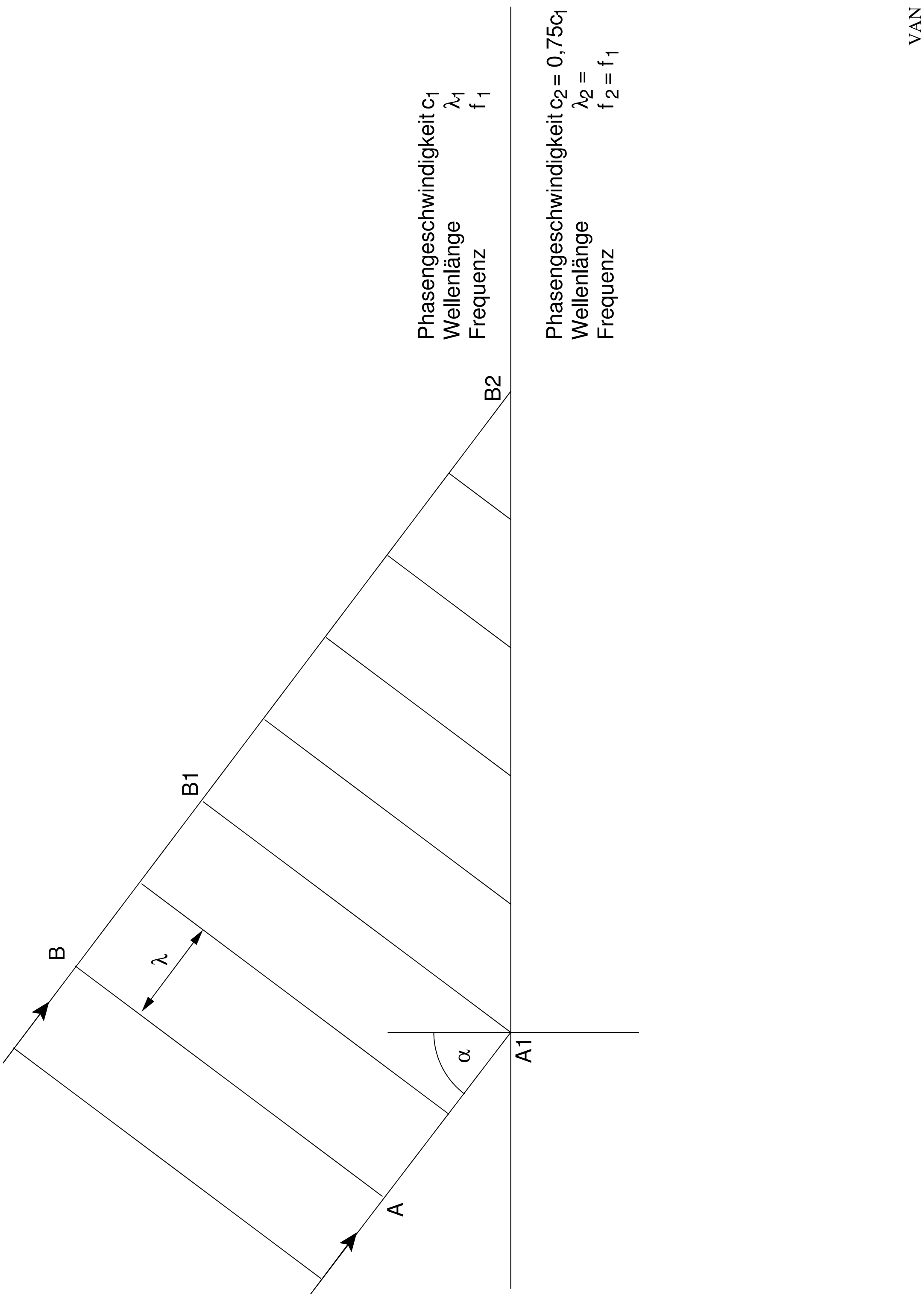
17 Huygen



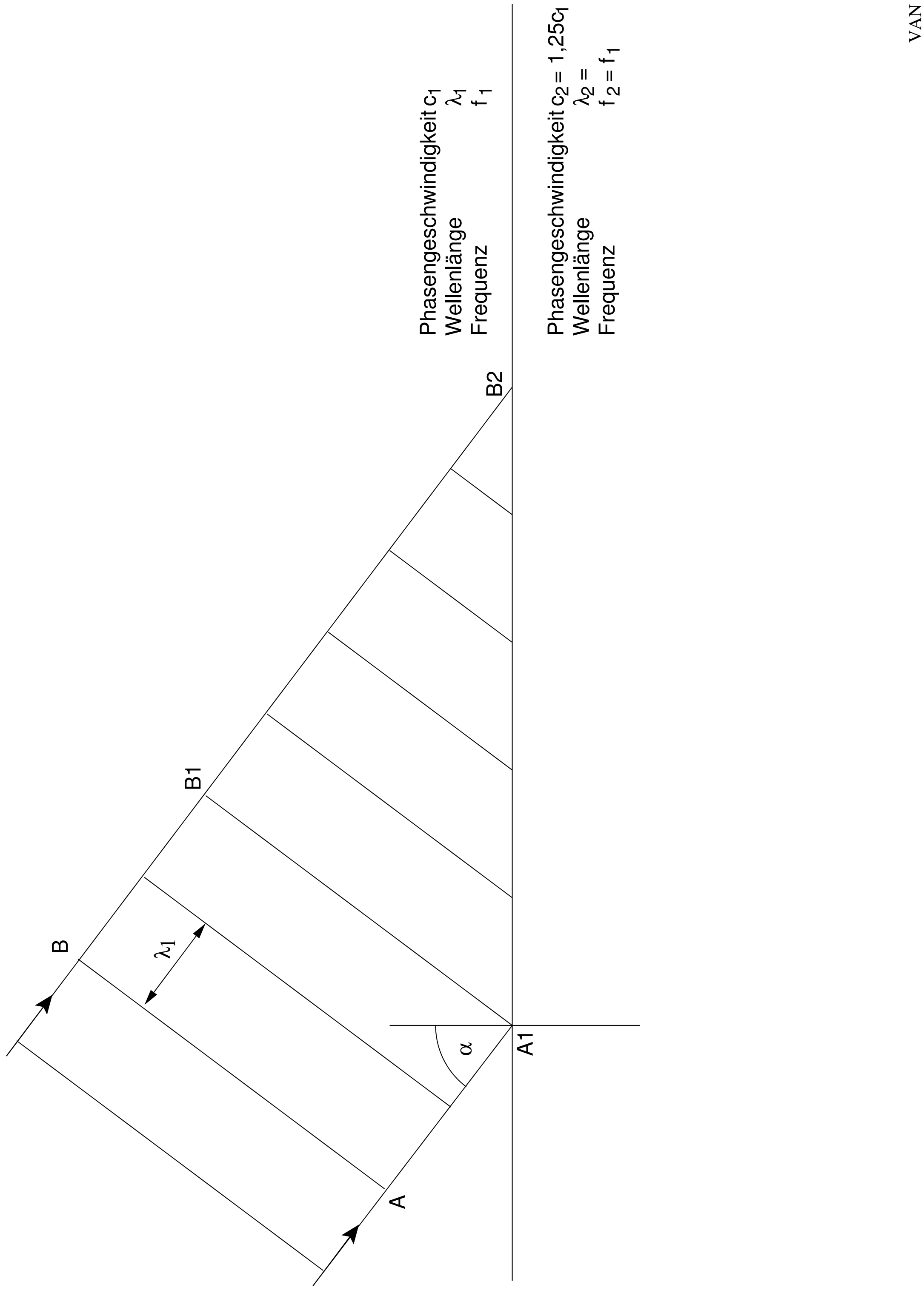
17.1 Reflexionsgesetz



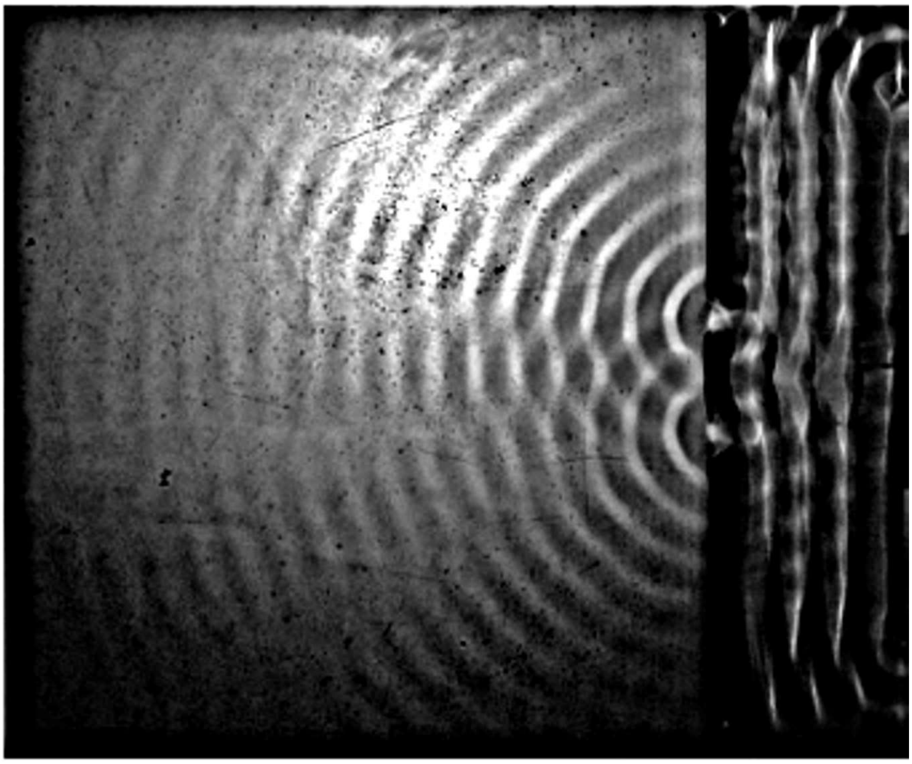
17.2 Brechung

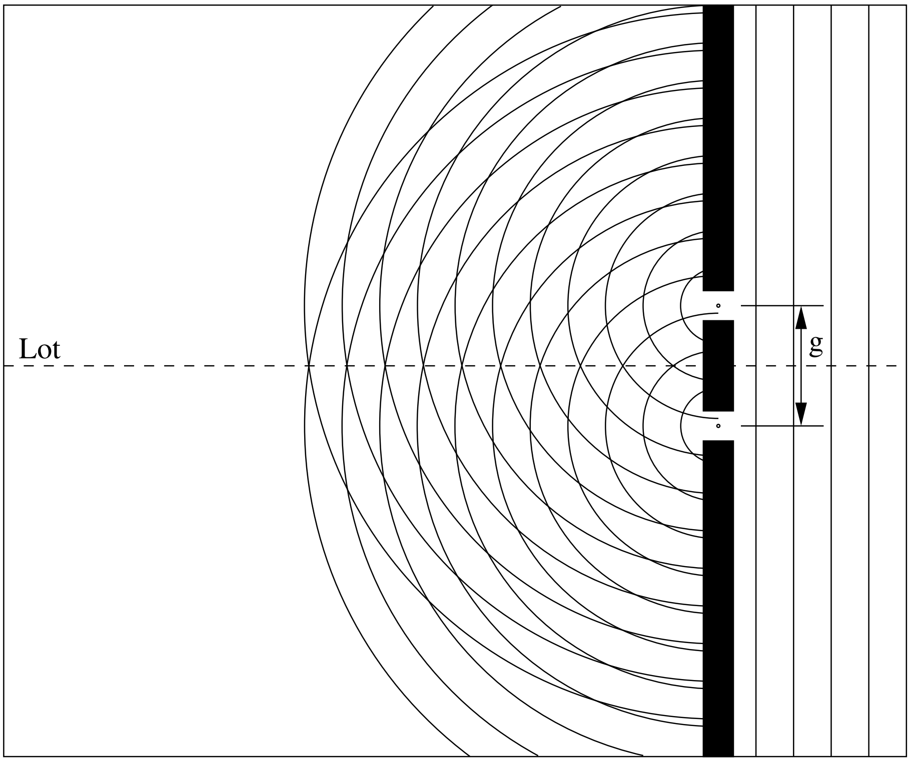


17.3 Totalreflexion



18 Beugung am Doppelspalt





A 18.1. Bestimmen Sie die Winkel zwischen Lot und den Bereichen konstruktiver Interferenz.

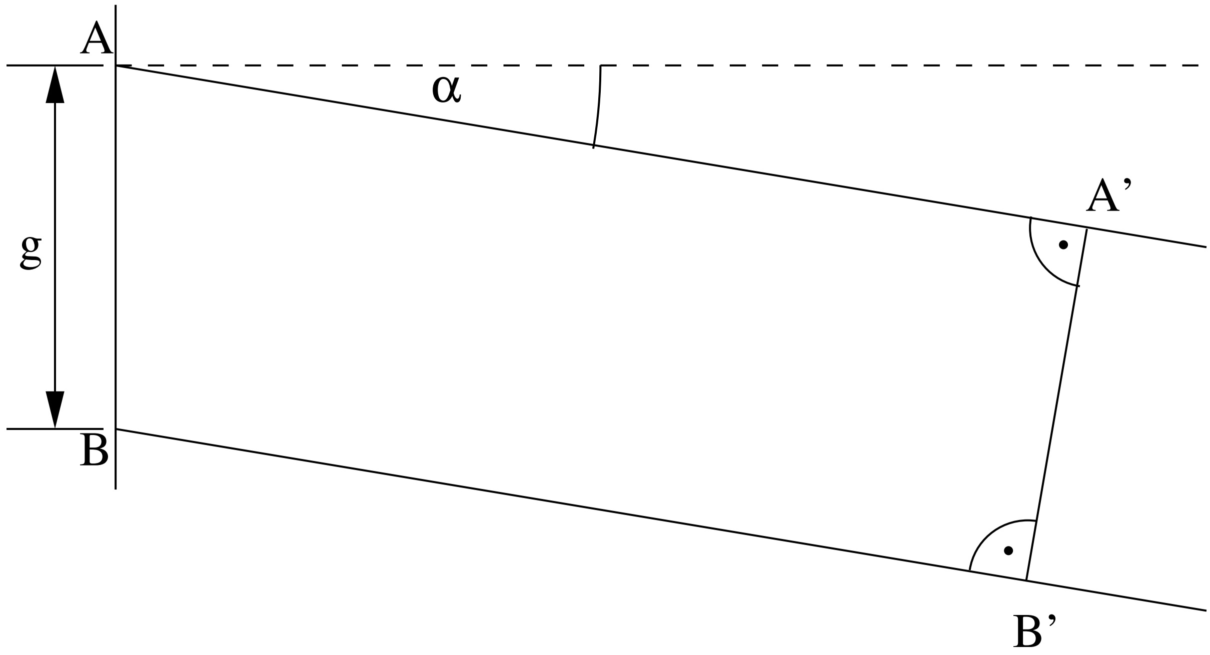
$\alpha_1 =$ $\alpha_2 =$ $\alpha_3 =$

18.1 Konstruktive Interferenz

A 18.2. Zwei Wellen mit dem gleichen Wellenvektor, der gleichen Wellenlänge λ und Phasengeschwindigkeit c überlagern sich. Die erste Welle startet im Punkt G und die zweite im Punkt H. Bestimmen Sie die Abstände Δs zwischen den Startpunkten, bei denen es zu einer konstruktiven Interferenz der Wellen kommt.

$\Delta s =$

A 18.3. Zwei Strahlen laufen parallel von den Punkten A und B aus im Winkel α zum Lot der Gerade durch A und B. Die Punkte A' und B' auf den Strahlen sind auf gleicher Höhe. Bestimmen Sie den Längenunterschied Δs zwischen den Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ in Abhängigkeit vom Winkel α.



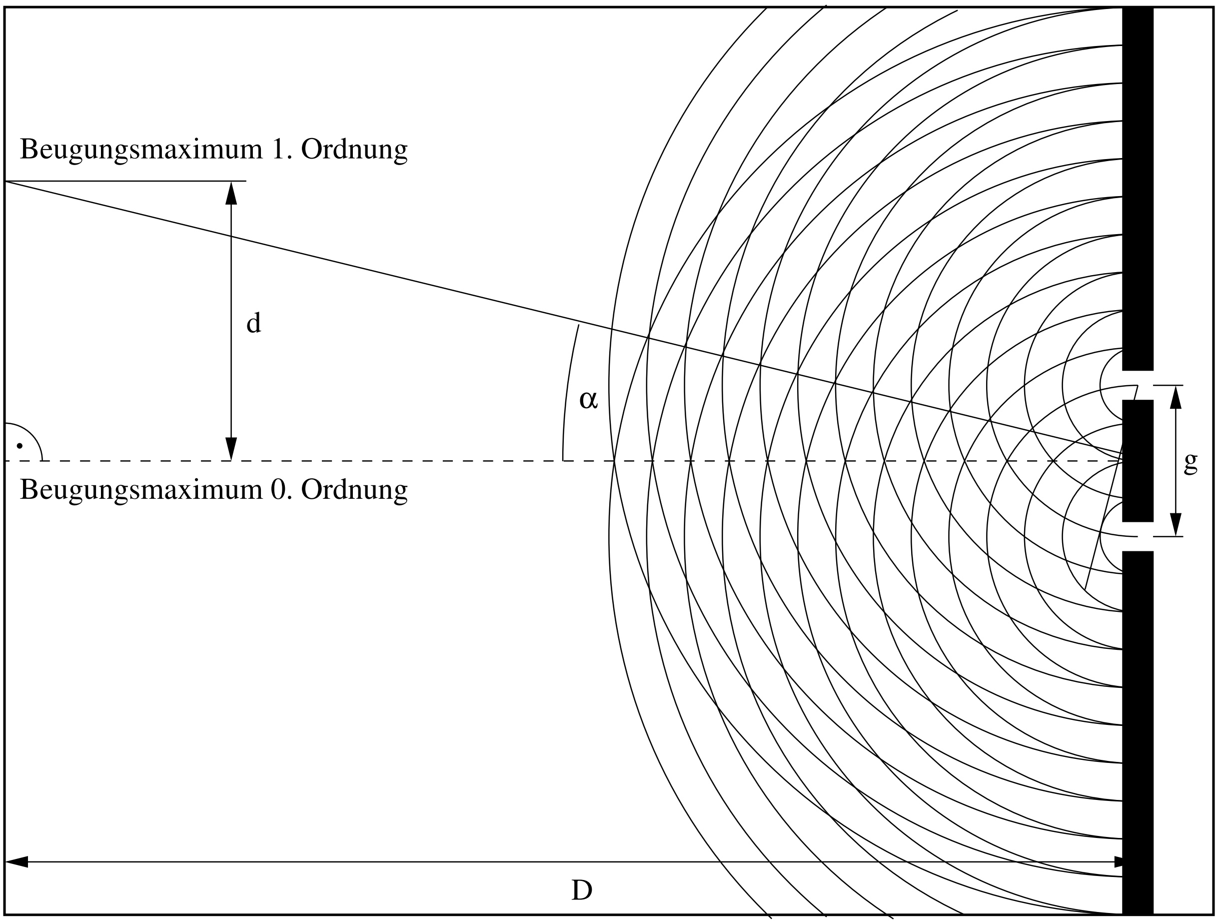
A 18.4. Kombinieren Sie Ihre Erkenntnisse aus Aufgabe 18.2 und 18.3 und geben Sie eine Formel für die Winkel an, bei denen es zu einer konstruktiven Interferenz kommt.

A 18.5. In dem in Aufgabe 18.1 dargestellten Versuch trifft eine parallele Wellenfront auf einen Doppelspalt mit dem Abstand g. Die Spalte können als zwei in Phase schwingende Erreger für Kreiswellen aufgefaßt werden. Daher kann die in der vorherigen Aufgabe angegebene Formel zur Ermittlung der Winkel konstruktiver Interferenz verwendet werden. Vergleichen Sie die mit der Formel für diese Abbildung theoretisch ermittelten Ergebnisse mit den gemessenen Ergebnissen aus Aufgabe 18.1.

A 18.6. Wiederholen Sie die obigen Überlegungen für den Fall der destruktiven Interferenz.

18.2 Beugungsabbildung

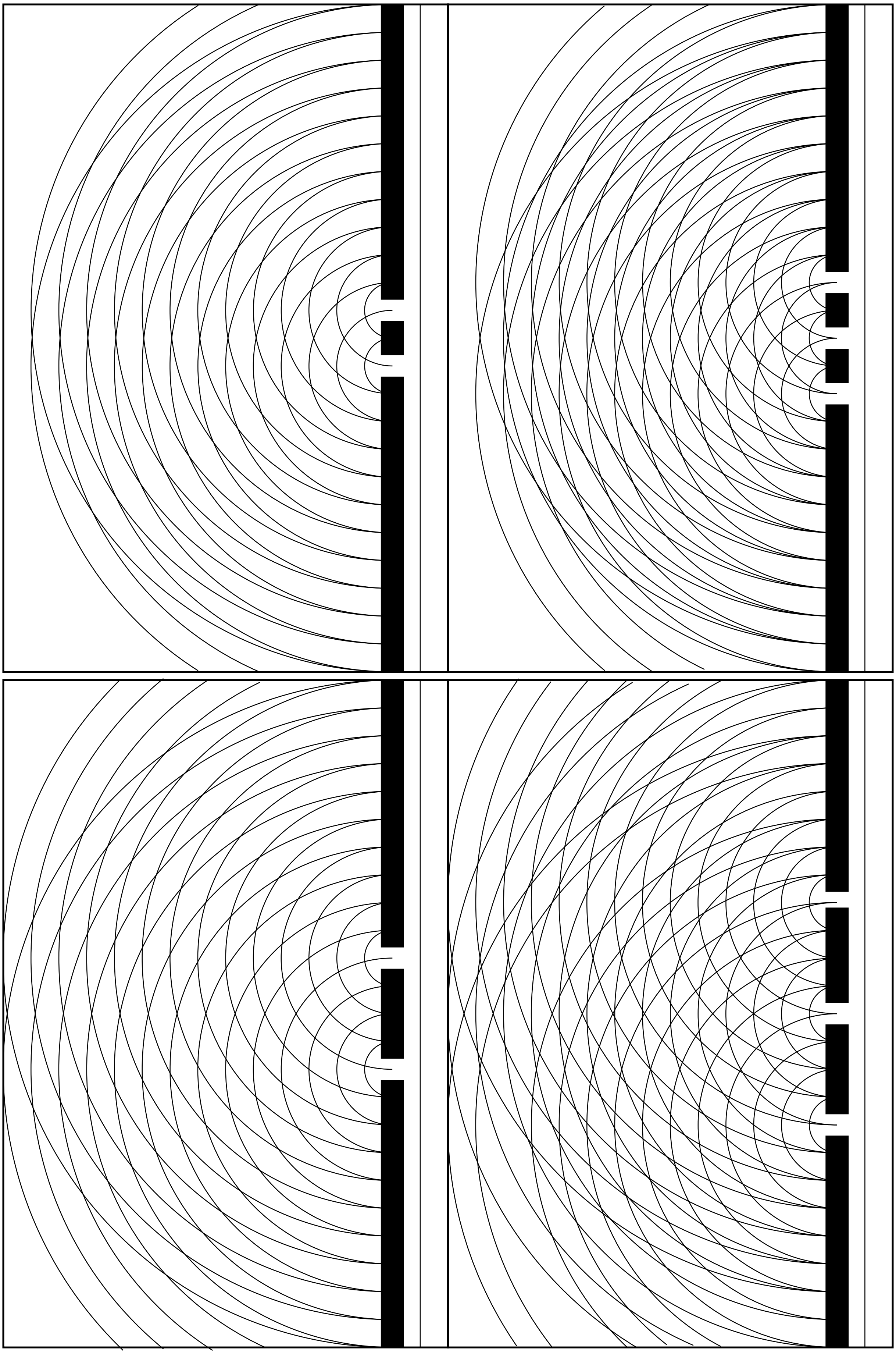
A 18.7. Im Abstand D vom Doppelspalt befindet sich eine Mauer. Bestimmen Sie aus der Zeichnung den Abstand zwischen dem Beugungsmaximum 0. Ordnung und dem 1. Ordnung.



A 18.8. Stellen Sie eine Formel auf, die allgemein den Abstand d des Beugungsmaximums n-ter Ordnung vom Beugungsmaximum 0. Ordnung auf einer im Abstand D vom Doppelspalt der Breite g befindlichen Fläche angibt.

18.3 Vom Doppelspalt zum Gitter

A 18.9. Zeichnen Sie nach dem Huygenschen Prinzip die Wellenfronten und die Wellenstrahlen der konstruktiven Interferenz in die Skizzen auf der nächsten Seite ein. Deuten Sie ihr Ergebnis.



19 Bestimmung der Wellenlänge von rotem Laserlicht

Materialien: 1x Grundplatte Optik, 1x Laserpointer, 1x Klemme, 2x Reiter für die Grundplatte, 1x Schirm, 1x Fassung mit Reiter, 1x Blendenhalter (aufsteckbar), 1x Gitter (250 Linien/cm), 1x Bogen Papier DIN A4

Schauen Sie nicht in den Laserstrahl. Richten Sie den Laser nicht auf andere Personen. Vermeiden Sie Reflektionen des Laserstrahls durch Schmuck, Geodreieck oder andere reflektierende Materialien.

In der Praxis wird für Liniengitter nicht die Gitterkonstante g angegeben, die den Abstand der Linien beschreibt, sondern eine Liniendichte N_L, die die Anzahl der Linien pro Strecke angibt. Um von der Liniendichte auf die Gitterkonstante zu kommen, muss man den Kehrwert bilden. $g = 1/N_L$

A 19.1. Berechnen Sie die Gitterkonstante g des verwendeten Gitters aus der Liniendichte.

A 19.2. Ergänzen Sie die Skizze des Versuchsaufbaus mit den zu messenden Größen!

A 19.3. Geben Sie die Formeln an, die Sie verwenden wollen.

A 19.4. Führen Sie die Messung durch. Tragen Sie Ihre Messungen und Ergebnisse in der Tabelle ein.

Ordnung n	1	2	3	4
Abstand d_n				
Beugungswinkel α_n				
Wellenlänge λ				

A 19.5. Bestimmen Sie die Wellenlänge!

A 19.6. Diskutieren Sie, welche Bedingung die Gitterkonstante erfüllen muss, damit das Gitter für diesen Versuch verwendet werden kann.

20 Auswertung von Beugungsmustern

- Gemessen wird nicht vom Hauptmaximum zum Nebenmaximum, sondern vom linken Nebenmaximum zum passenden rechten Nebenmaximum. Der Abstand wird dann durch zwei geteilt.
- Für eine bessere Genauigkeit werden mehrere Ordnungen von Nebenmaxima verwendet und der Mittelwert der bestimmten Wellenlängen gebildet.
- Wenn es schnell gehen soll, wird ein gut sichtbares Nebenmaximum mit einer möglichst hohen Ordnung verwenden. Auch hier reduziert sich dann der Messfehler.
- Die Vereinfachung der Formel wird nur verwendet, wenn der Quotient aus Maxima-Abstand und Schirmentfernung kleiner als 1/12 ist bzw. der Winkel kleiner als 5° ist.

A 20.1. Das Laserlicht von drei verschiedenen Laserstrahlen wurde durch ein optisches Liniengitter (250 Linien/cm) geschickt. Der Abstand zwischen Schirm und Gitter betrug 1,00 m. Dabei können die Beugungsmuster in der folgenden Abbildung 20.1 beobachtet werden.

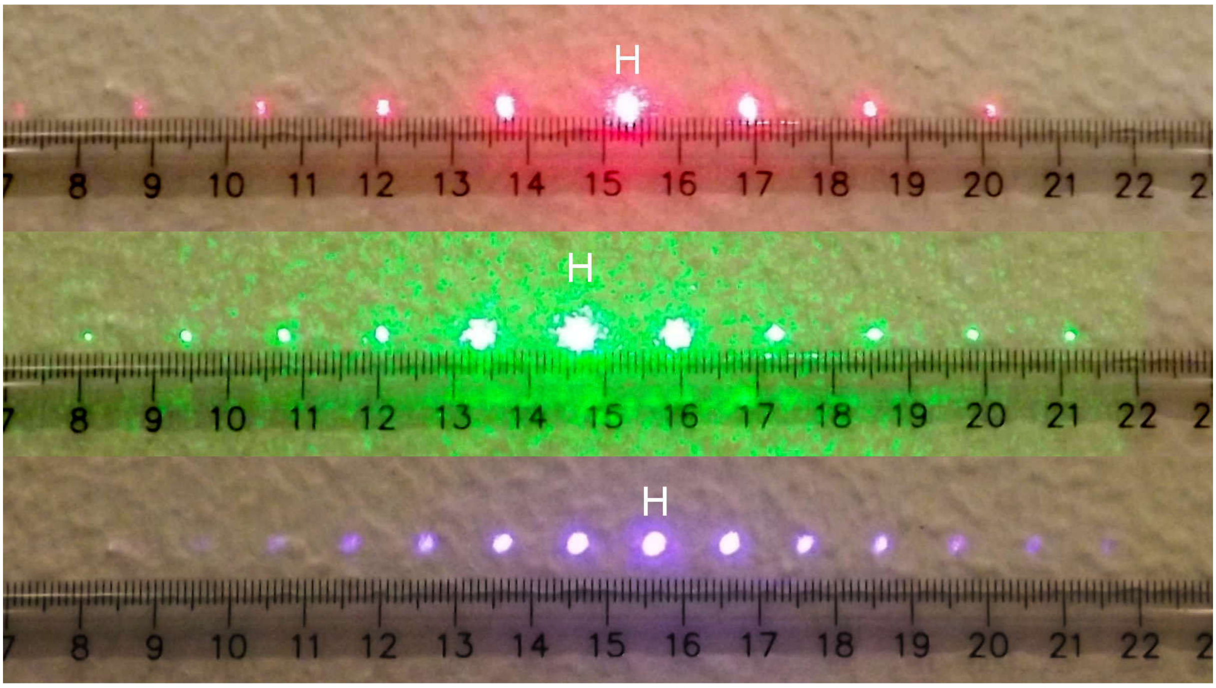


Abbildung 20.1: Beugungsmuster für drei verschiedene Laser

a) Berechnen Sie die Gitterkonstante g.

b) Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichtes für alle drei Fälle.

	Ordnung	Abstand Maxima	Beugungswinkel	Wellenlänge	Farbe
oben	1				
oben	2				
oben	3				
mitte	1				
mitte	2				
mitte	3				
mitte	4				
unten	1				
unten	2				
unten	3				
unten	4				

c) Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Hauptmaximum und dem Maximum 1. Ordnung für das gelbe Licht der Natriumdampflampe ($\lambda = 589\,\text{nm}$).

21 Beugung am Einzelspalt

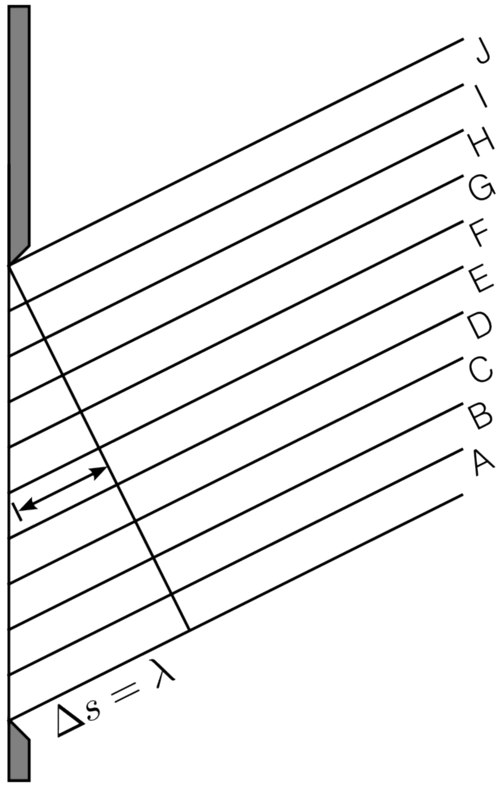
Schickt man Laserlicht durch einen engen Einzelspalt, so ist ebenfalls ein Beugungsmuster erkennbar.

A 21.1. In der Grafik rechts sind beispielhafte Strahlenverläufe gleichen Winkels eingetragen worden. Dabei beträgt der Gangunterschied zwischen den beiden äußersten Strahlen genau eine Wellenlänge λ.

a) Gebe an, bei welchem Gangunterschied es zu einer destruktiven Interferenz kommt.

b) Bestimme, welche Strahlenbündel (A-J) mit welchem Strahlenbündel (A-J) destruktiv interferiert.

c) Gebe begründet an, ob es ingesamt zu einer konstruktiven oder destruktiven Interferenz kommt.



A 21.2. Entwickle auf Basis der Formeln für konstruktive Interferenz am Gitter eine Formel für die destruktive Interferenz am Einzelspalt.

22 Beugung an kleinen Öffnungen

V 22.1. Sie brauchen einen Laserpointer und ein Stück Alufolie. Stechen Sie in das Stück Alufolie runde, dreieckige und quadratische kleine Löcher. Diese sollten etwa genau so groß wie der Lichtpunkt des Lasers sein. Beleuchten Sie mit dem Laserpointer die Öffnungen und projezieren Sie das entstehende Bild auf einen Schirm. Notieren Sie ihre Beobachtung.

V 22.2. Betrachten Sie zwei nebeneinanderliegende LEDs. Stechen Sie mit einer Stecknadel oder einer Zirkelspitze ein Loch in ein Stück Alufolie. Entfernen Sie sich jetzt langsam deutlich von den LEDs. Betrachten Sie die LEDs mal durch das Loch in der Alufolie und mal ohne die Alufolie. Beschreiben Sie Ihre Beobachtung und deuten Sie das Ergebnis.

Jeder Punkt eines Objekts wird bei einer optischen Abbildung durch ein Beugungsscheibchen dargestellt. Zwei solche Scheibchen sind nur dann als einzelne Scheibchen unterscheidbar, wenn die Mittelpunkte mindestens um ihren Radius R auseinanderliegen. Als Radius R bezeichnet man den Abstand vom Hauptmaximum zum Minimum erster Ordnung.

Die Überlagerung der Intensitätsverläufe ist in Abbildung 22.1 dargestellt.

Für Kreisblenden mit dem Durchmesser d gilt für den kleinsten aufzulösenden Winkel

$$\Delta\alpha = 1{,}22\frac{\lambda}{d} = \frac{R}{b} = \frac{\Delta x}{g} \tag{22.1}$$

mit

λ	Wellenlänge
R	Abstand zwischen Hauptmaximum und Minium erster Ordnung in der Abbildung
b	Bildweite (Abstand zwischen Spalt und Schirm)
g	Gegenstandsweite (Abstand zwischen Spalt und Objekt)
Δx	Kleinste Strecke auf dem Gegenstand, die aufgelöst werden kann.

A 22.1. Das Handy LG KU990i besitzt eine eingebaute Kamera mit einer Auflösung von 5 Megapixeln. Die Bildgröße beträgt 2592 x 1944 Pixel. Vermutlich ist der Sensor 5,4 mal 4,0 mm groß und die Bildweite beträgt 5 mm. Das Objektiv hat einen Durchmesser von 1,5 mm. ($\lambda = 585\,\text{nm}$)

a) Bestimmen Sie den kleinsten Auflösungswinkel mit der eingebauten Optik.
b) Berechnen Sie die kleinste Strecke, die man in 10 m Entfernung auflösen kann.
c) Bestimmen Sie die kleinste Strecke, die auf dem Sensor aufgelöst wird.
d) Berechnen Sie Breite und Länge eines Pixels.

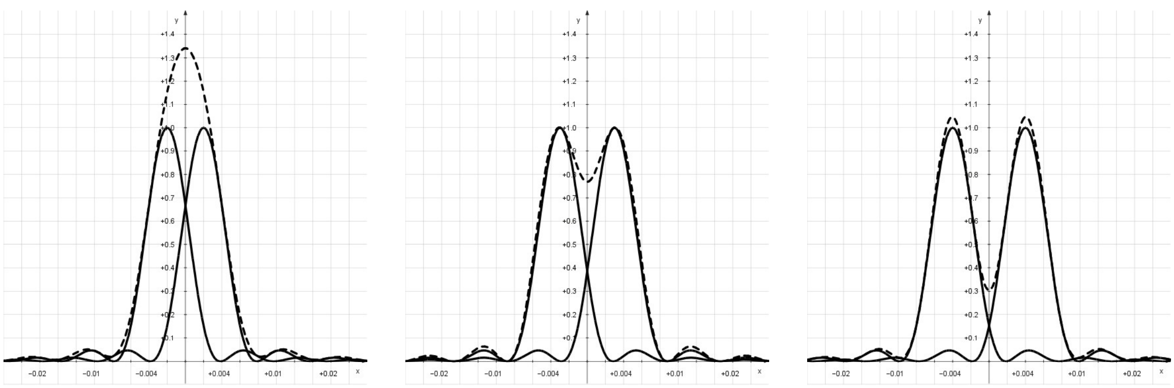
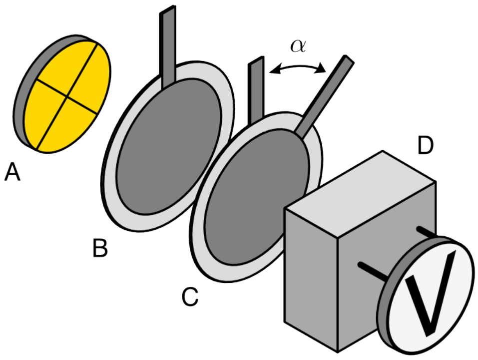


Abbildung 22.1: Überlagerung der Intensitätsverläufe zweier benachbarter Punktlichtquellen.

23 Abiturtraining Polarisation

A 23.1. In der Fotografie gibt es Graufilter mit einer einstellbaren Lichtdurchlässigkeit. Dazu werden zwei Polarisationsfilter übereinander gelegt. Die beiden Filter können gegeneinander verdreht werden. In Abhängigkeit vom Winkel α zwischen den Polarisationsrichtungen der beiden Filter kommt mehr oder weniger Licht durch den Filter.

Mit dem in Abbildung 23.1 gezeigten Versuchsaufbau soll der Zusammenhang zwischen der Intensität des durchgelassenen Lichtes und dem Winkel α untersucht werden. Für den ersten Versuch wird eine grüne LED als Beispiel für das sichtbare Licht verwendet, da das menschliche Auge für grün besonders empfindlich ist und die Farbe als besonders hell empfunden wird. In weiteren Versuchen wird eine UV-LED und eine IR-LED verwendet. Die gemessenen Spannungswerte stehen in Tabelle 23.1.



A: Lichtquelle
(LEDs mit unterschiedlicher Wellenlänge)
B: Polarisationsfilter 1
C: Polarisationsfilter 2 (drehbar, Winkel α)
D: Lichtsensor
E: Voltmeter (Spannung U)

Abbildung 23.1: Versuchsaufbau zum Polarisationsfilterpaar: Die am Voltmeter angezeigte Spannung U ist proportional zur gemessenen Intensität des durchgelassenen Lichts.
Der Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen der Polarisationsfilter ist mit α bezeichnet.

a) Erläutern Sie den Unterschied zwischen longitudinalen und transversalen Wellen unter Berücksichtigung der Polarisation an je einem Beispiel.
b) Im ersten Versuch wird die Durchlässigkeit des Polarisationsfilterpaars für das Licht der grünen LED untersucht. Zeichnen Sie mit den Messwerten dieses Versuchs aus Tabelle 23.1 ein $U(\alpha)$-Diagramm.
c) Stellen Sie eine begründete Hypothese über die Durchlässigkeit des Polarisationsfilterpaars für grünes Licht basierend auf den Messergebnissen auf.
d) Der Versuch wird mit der UV-LED und der IR-LED wiederholt. Zeichnen Sie Graphen der Messwerte dieser beiden Versuche aus Tabelle 23.1 ebenfalls in Ihr $U(\alpha)$-Diagramm aus Teilaufgabe b) ein.
e) Beschreiben Sie unter Verwendung der Graphen des $U(\alpha)$-Diagramms die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Durchlässigkeit des Polarisationsfilterpaars für das Licht der grünen LED, UV-LED und IR-LED.
f) Zeigen Sie, dass der funktionale Zusammenhang zwischen der Spannung U und dem Winkel α durch eine Sinus-Funktion beschrieben werden kann.

Lichtfarbe	Wellenlänge λ	Winkel α	ohne Filter	0°	30°	60°	90°	120°	150°
UV	400 nm	U [V]	2,79	0,19	0,15	0,06	0,02	0,06	0,15
grün	560 nm	U [V]	2,41	2,31	1,74	0,61	0,04	0,61	1,75
IR	850 nm	U [V]	2,05	1,96	1,94	1,90	1,88	1,90	1,94

Tabelle 23.1: Die am Voltmeter gemessene Spannung U in Abhängigkeit vom Winkel des zweiten Polarisationsfilters bzw. ohne das Filterpaar.

24 Abiturtraining Interferometer

A 24.1. Mikrowellen sind niederfrequente elektromagnetische Wellen im Zentimeter-Bereich. Diese werden u. a. beim Radar und in der Mikrowelle verwendet.

Mit einem Michelson-Interferometer soll eine Mikrowellenstrahlung untersucht werden. Den prinzipielle Aufbau des Interferometers zeigt Abbildung 24.1 Links. Die zwei Spiegel bestehen aus Metall. Die Glasplatte läßt die Strahlung teilweise durch und reflektiert sie teilweise. Die Brechung kann bei diesem Versuchsaufbau vernachlässigt werden.

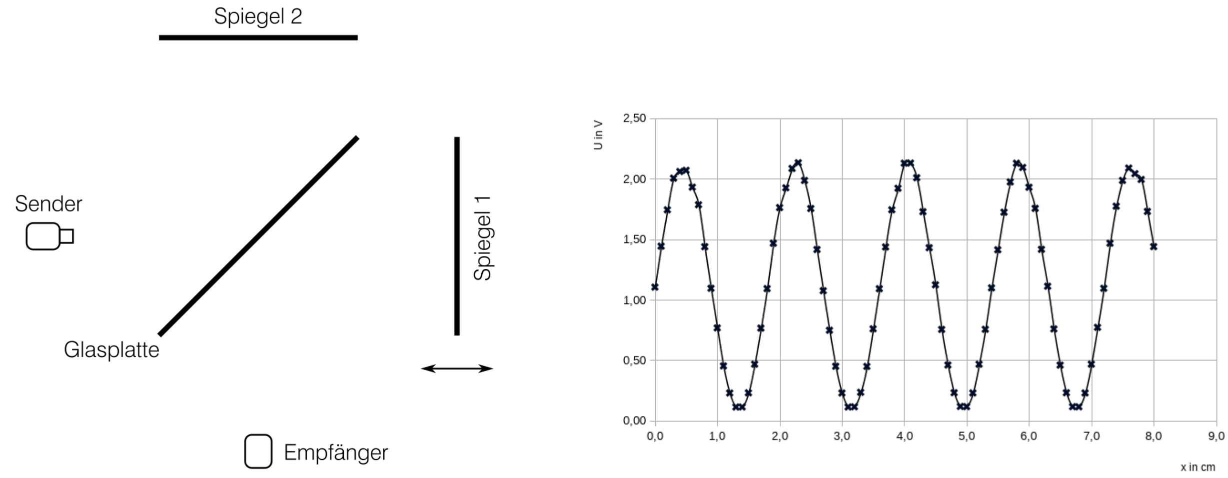


Abbildung 24.1: Links: Prinzipieller Aufbau eines Michaelson-Interferometers
Rechts: Die vom Empfänger gemessene Spannung in Abhängigkeit von der Verschiebung

a) Um die Wellenlänge der Mikrowellenstrahlung zu bestimmen, wird der Spiegel 1 verschoben.

25 Lösungen

1.1 Gleichförmige Kreisbewegung

A 1.1 $r = 6{,}5\,\text{m}$ $N = 330$ $t = 60\,\text{s}$

a) Frequenz f, Umlaufzeit T und Winkelgeschwindigkeit ω

$$f = \frac{330}{60\,\text{s}} = 5{,}5\,\text{Hz} \qquad T = \frac{60\,\text{s}}{330} \approx 0{,}1818\,\text{s} \qquad \omega = 2\pi\frac{330}{60\,\text{s}} \approx 34{,}56\,\text{s}^{-1} \tag{25.1}$$

b) Geschwindigkeit v und Beschleunigung a

$$v = r\cdot\omega = 6{,}5\,\text{m}\cdot 34{,}56\,\text{s}^{-1} = 224{,}64\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{25.2}$$

$$a = \omega^2\cdot r = \left(34{,}56\,\text{s}^{-1}\right)^2\cdot 6{,}5\,\text{m} \approx 7764\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 776\,\text{g} \tag{25.3}$$

A 1.2 $r = 0{,}46\,\text{m}$ $v = 350\,\text{km/h} = 97{,}2\,\text{m/s}$

a) Frequenz f und Umlaufzeit T

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{97{,}2\,\text{m/s}}{2\pi\cdot 0{,}46\,\text{m}} \approx 33{,}63\,\text{Hz} \qquad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 0{,}46\,\text{m}}{97{,}2\,\text{m/s}} \approx 29{,}7\,\text{ms} \tag{25.4}$$

b) Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{97{,}2\,\text{m/s}}{0{,}46\,\text{m}} \approx 211\,\text{s}^{-1} \tag{25.5}$$

c) Annahme: Das Stück ist am Rand abgeplatzt $\Longrightarrow r = 0{,}46\,\text{m}$ $\omega = 211\,\text{s}^{-1}$ $m = 0{,}05\,\text{kg}$
Zentripedalkraft, die die Achse liefern müssen:

$$F_z = m\cdot\omega^2\cdot r = 0{,}05\,\text{kg}\cdot\left(211\,\text{s}^{-1}\right)^2\cdot 0{,}46\,\text{m} \approx 1024\,\text{N} \tag{25.6}$$

A 1.3 $T = 86164\,\text{s}$ $r = 6\,370\,000\,\text{m}$

a) Frequenz f und Winkelgeschwindigkeit ω

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{86164\,\text{s}} \approx 1{,}16\cdot 10^{-5}\,\text{Hz} \tag{25.7}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 1{,}16\cdot 10^{-5}\,\text{Hz} \approx 7{,}29\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} \tag{25.8}$$

b) Kreisradius für Stade r_{STD}, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a

$$_{\text{STD}} = 6\,370\,000\,\text{m}\cdot\cos 56{,}6^\circ \approx 3\,507\,000\,\text{m} \tag{25.9}$$

$$v_A = 6\,370\,000\,\text{m}\cdot 7{,}29\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} \approx 464\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad v_{\text{STD}} = 3\,507\,000\,\text{m}\cdot 7{,}29\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} \approx 256\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{25.10}$$

$$a_A = 6\,370\,000\,\text{m}\cdot\left(7{,}29\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}\right)^2 \approx 0{,}034\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad a_{\text{STD}} = 3\,507\,000\,\text{m}\cdot\left(7{,}29\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}\right)^2 \approx 0{,}019\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{25.11}$$

c) Die Zentrifugalbeschleunigung wirkt entgegengesetzt zur Erdbeschleunigung. Der Effekt beträgt aber nur 3,47 Promille der Erdbeschleunigung.

d) $a_z = 9{,}81\,\text{m/s}^2$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r}{a_z}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot 6\,370\,000\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} \approx 5063\,\text{s} \approx 1{,}4\,\text{h} \tag{25.12}$$

A 1.4 $h = 200\,\text{km}$ $U = 40076{,}6\,\text{km}$ $g_{200} = 9{,}22\,\text{ms}^{-2}$

a) Radius der Erde am Äquator

$$U = 2\pi r \Longrightarrow r = \frac{U}{2\pi} = \frac{40076{,}2\,\text{km}}{2\pi} \approx 6378\,\text{km} \tag{25.13}$$

Bahnradius R

$$R = r + h = 6378\,\text{km} + 200\,\text{km} = 6578\,\text{km} \tag{25.14}$$

b) Die Zentripetalkraft muss gleich der Erdbeschleunigung sein.

$$g_{200} = a_z = \omega_S^2\cdot r \Longrightarrow \omega_S = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}22\,\text{ms}^{-2}}{6578000\,\text{m}}} = 1{,}18\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1} \tag{25.15}$$

Umlaufzeit

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T_S} \Longrightarrow T_S = \frac{2\pi}{\omega_S} = \frac{2\pi}{1{,}18\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}} \approx 5325\,\text{s} \approx 88{,}7\,\text{min} \approx 1{,}48\,\text{h} \tag{25.16}$$

c) Die Erde dreht sich von West nach Ost und ist damit der Satellitenbewegung entgegengesetzt.

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_E} = \frac{2\pi}{86400\,\text{s}} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} \tag{25.17}$$

$$\omega_{SE} = \omega_S + \omega_E = 1{,}18\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1} + 7{,}3\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} = 1{,}25\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1} \tag{25.18}$$

$$T_{SE} = \frac{2\pi}{\omega_{SE}} = \frac{2\pi}{1{,}25\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}} \approx 5026{,}5\,\text{s} \approx 83{,}8\,\text{min} \approx 1{,}40\,\text{h} \tag{25.19}$$

Der Satellit fliegt von der Erde aus gesehen ungefähr 6% schneller als für einen Beobachter außerhalb der Erde. Die Umlaufzeit verkürzt sich um ca. 5 Minuten.

d) Bei einem Start in östlicher Richtung addiert sich die Winkelgeschwindigkeit der Erde zur Satellitengeschwindigkeit dazu. Der Aufwand für die notwendige Bahngeschwindigkeit sinkt damit.

6 Eigenschaften des harmonischen Oszillators

A 6.1 $D = 10\,\mathrm{N/m}$; $s_\mathrm{e} = 20\,\mathrm{cm}$; $m = 400\,\mathrm{g} = 0{,}4\,\mathrm{kg}$; $\hat{y} = 20\,\mathrm{cm}$; $g = 9{,}81\,\mathrm{N/kg}$

a) $s_0 =?$; $s_0 = s_\mathrm{e} + s$; $F_\mathrm{g} = D \cdot s$

$$s = \frac{F_\mathrm{g}}{D} = \frac{m \cdot g}{D} = \frac{m = 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{N/kg}}{10\,\mathrm{N/m}} = 0{,}3924\,\mathrm{m} = 39{,}24\,\mathrm{cm} \qquad s_0 = s_e + s = 20\,\mathrm{cm} + 39{,}24\,\mathrm{cm} = 59{,}24\,\mathrm{cm}$$

Die Feder ist in der Ruhelage 59,2 cm lang.

b) $T =?$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{N/m}}} = 1{,}26\,\mathrm{s} \qquad [T] = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{N/m}}} = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{kg}}{1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2}}}} = \sqrt{1\,\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{s}$$

Das Feder-Masse-Pendel hat eine Periodendauer von 1,26 s

c) $y_0 = 20\,\mathrm{cm}$: Die Amplitude beträgt 20 cm.

d) $F_\mathrm{R}(y_0) =?$; $F_\mathrm{R}(\hat{y}) =?$

$$F_\mathrm{R}(\hat{y}) = -D \cdot \hat{y} = -10\,\mathrm{N/m} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = -2\,\mathrm{N}$$

Die rücktreibende Kraft in der Amplitude beträgt 2 N und in der Ruhelage 0 N.

e) $E =?$

$$E = \frac{1}{2}D\hat{y}^2 = \frac{1}{2}10\,\mathrm{N/m}(0{,}2\,\mathrm{m})^2 = 0{,}2\,\mathrm{J}$$

f) $v(y_0) =?$; $v(\hat{y}) =?$; $E = 0{,}2\,\mathrm{J}$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}2\,\mathrm{J}}{0{,}4\,\mathrm{kg}}} = 1\,\mathrm{m/s}$$

Die Geschwindigkeit in der Amplitude beträgt 0 m/s und in der Ruhelage 1 m/s.

7 Reagenzglaspendel

A 7.1 $T=?$, $d=2{,}8\,\mathrm{cm}$, $m=50\,\mathrm{g}$, $g=10\,\mathrm{m/s^2}$, $\rho=1\,\mathrm{g/cm^3}$

$$A=\pi r^2=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{A\cdot\rho\cdot g}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\rho\cdot g}}$$

$$[T]=\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^2\cdot g/cm^3\cdot m/s^2}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{g\cdot cm^3\cdot s^2}}{\mathrm{cm^2\cdot g\cdot m}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{s^2\cdot cm}}{\mathrm{m}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{s^2\cdot cm}}{100\,\mathrm{cm}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{s^2}}{100}}=\frac{1}{10}\,\mathrm{s} \qquad \{T\}=2\pi\sqrt{\frac{50}{\pi\left(\frac{2{,}8}{2}\right)^2\cdot 1\cdot 10}}\approx 5{,}66$$

$$T=\{T\}\cdot[T]\approx 5{,}66\cdot\frac{1}{10}\,\mathrm{s}\approx 0{,}566\,\mathrm{s}$$

A 7.2 $T=?$, $d=40\,\mathrm{cm}$, $m=80\,\mathrm{kg}$, $g=10\,\mathrm{m/s^2}$, $\rho=1\,\mathrm{g/cm^3}$

$$A=\pi r^2=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{A\cdot\rho\cdot g}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\rho\cdot g}}$$

$$[T]=\sqrt{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm^2\cdot g/cm^3\cdot m/s^2}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{kg\cdot cm^3\cdot s^2}}{\mathrm{cm^2\cdot g\cdot m}}}=\sqrt{\frac{1000\,\mathrm{g\cdot s^2\cdot cm}}{\mathrm{g}\cdot 100\,\mathrm{cm}}}=\sqrt{10\,\mathrm{s^2}}=\sqrt{10}\,\mathrm{s} \qquad \{T\}=2\pi\sqrt{\frac{80}{\pi\left(\frac{40}{2}\right)^2\cdot 1\cdot 10}}\approx 0{,}501$$

$$T=\{T\}\cdot[T]=0{,}501\cdot\sqrt{10}\,\mathrm{s}\approx 1{,}59\,\mathrm{s}$$

A 7.3 Das Wasser im Toten Meer hat eine deutlich höhere Dichte ($\rho=1{,}24\,\mathrm{g/cm^3}$) als Trinkwasser. Nach der Formel für die Periodendauer

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{A\cdot\rho\cdot g}}$$

müsste die Periodendauer daher abnehmen.

8 Schwerependel

A 8.1 $T=2\,\mathrm{s}$; $g=9{,}8128\,\mathrm{m/s^2}$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Rightarrow l=g\cdot\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$[l]=1\,\mathrm{m/s^2}\cdot(1\,\mathrm{s})^2=1\,\mathrm{m} \qquad \{l\}=9{,}8128\cdot\left(\frac{2}{2\pi}\right)^2\approx 0{,}9942 \qquad l=\{l\}\cdot[l]=0{,}9942\,\mathrm{m}$$

A 8.2 $l=7\,\mathrm{cm}=0{,}07\,\mathrm{m} g_\mathrm{S}=9{,}8128\,\mathrm{m/s^2}$; $g_\mathrm{Z}=9{,}8067\,\mathrm{m/s^2}$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Stade

$$[T_\mathrm{S}]=\sqrt{\frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s^2}}}=1\,\mathrm{s} \qquad \{T_\mathrm{S}\}=2\pi\sqrt{\frac{0{,}07}{9{,}8128}}\approx 0{,}53065 \qquad T_\mathrm{S}=\{T_\mathrm{S}\}\cdot[T_\mathrm{S}] approx 0{,}53065\,\mathrm{s}$$

Zürich

$$[T_\mathrm{Z}]=\sqrt{\frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s^2}}}=1\,\mathrm{s} \qquad \{T_\mathrm{Z}\}=2\pi\sqrt{\frac{0{,}07}{9{,}8067}}\approx 0{,}53084 \qquad T_\mathrm{Z}=\{T_\mathrm{Z}\}\cdot[T_\mathrm{Z}]\approx 0{,}53084\,\mathrm{s}$$

Abweichung gerade einmal 0,04 Prozent.

A 8.3 $n=10\,000$; $t=20\,062{,}10\,\mathrm{s}\Rightarrow T=2{,}006\,210\,\mathrm{s}$; $l=1{,}000\,000\,\mathrm{m}$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Rightarrow g=l\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$[g]=1\,\mathrm{m}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2=1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \qquad \{g\}=1\cdot\left(\frac{2\pi}{2{,}006\,210}\right)^2\approx 9{,}80860 \qquad g=\{g\}\cdot[g]=9{,}80860\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

A 8.4 Mit einem Schwerependel kann man den Ortsfaktor bestimmen. Öl hat eine geringere Dichte als normales Gestein und damit ist der Ortsfaktor an dieser Stelle etwas geringer. Das Pendel schlägt also langsamer und die Periodendauer vergrößert sich. Eisenerz hat eine höhere Dichte als normales Gestein und damit ist der Ortsfaktor etwas größer. Das Pendel schlägt also schneller und die Periodendauer verkleinert sich.

9 Extremsport Kiiking

A 9.1 $h = 1{,}1\,\mathrm{m}$; $m = 80\,\mathrm{kg}$; $l = 7\,\mathrm{m}$; $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

a) Es handelt sich um ein Schwerependel. Die rücktreibende Kraft ist proportional zum Sinus des Auslenkungswinkel und damit nicht proportional zur Auslenkungen. Nur wenn die Auslenkung sehr klein ist, dann kann ein Schwerependel als ein harmonischer Oszillator betrachtet werden. Ansonsten ist es kein harmonischer Oszillator.

b) $r = l - h = 7\,\mathrm{m} - 1{,}1\,\mathrm{m} = 5{,}9\,\mathrm{m}$

c) $s = 2r = 2 \times 5{,}9\,\mathrm{m} = 11{,}8\,\mathrm{m}$ $E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot s = 80\,\mathrm{kg} \times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \times 11{,}8\,\mathrm{m} = 9260{,}64\,\mathrm{J}$

d) $E_{\mathrm{pot}}(r) = 2\,m\,g\,r$

e) $v = \sqrt{4\,g\,r} = \sqrt{4 \times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \times 5{,}9\,\mathrm{m}} \approx 15{,}22\,\mathrm{m/s}$

f)

$$E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{kin}} \quad \Rightarrow \quad 2\,m\,g\,r = \frac{1}{2} m\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 4\,g\,r \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{4\,g\,r}$$

g)

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(15{,}22\,\mathrm{m/s})^2}{5{,}9\,\mathrm{m}} = 39{,}26\,\mathrm{m/s^2}$$

h)

$$F = F_{\mathrm{z}} + F_g = m\,a + m\,g = 80\,\mathrm{kg} \times 39{,}26\,\mathrm{m/s^2} + 80\,\mathrm{kg} \times 39{,}26\,\mathrm{m/s^2} = 3926\,\mathrm{N}$$

Die Kraft beträgt ca. 3926 N. Das entspricht der Gewichtskraft von ca. 393 kg.

i) $s_{\mathrm{W}} = 0{,}5\,\mathrm{m}$

$$W = F \cdot s_{\mathrm{W}} = 3926\,\mathrm{N} \times 0{,}5\,\mathrm{m} = 1963\,\mathrm{J}$$

$9261\,\mathrm{J} \div 1963\,\mathrm{J} \approx 4{,}7$
Die Energiezunahme beträgt ca. ein Fünftel der für den Überschlag benötigten Energie.

j) Die Energiezunahme hängt ab von der Kraft, gegen die gearbeitet wird. Diese Kraft setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft und der Zentrifugalkraft. Am Anfang hat die Schaukelbewegung eine kleine Amplitude. Die Geschwindigkeit und damit die Zentrifugalkraft im tiefsten Punkt ist daher klein. Je schneller die Schaukel schwingt, desto größer wird die Zentrifugalkraft und desto größer wird die dafür zugeführte Energie.

Inhaltsverzeichnis