4 Herleitung der Periodendauer des Feder-Masse-Pendels

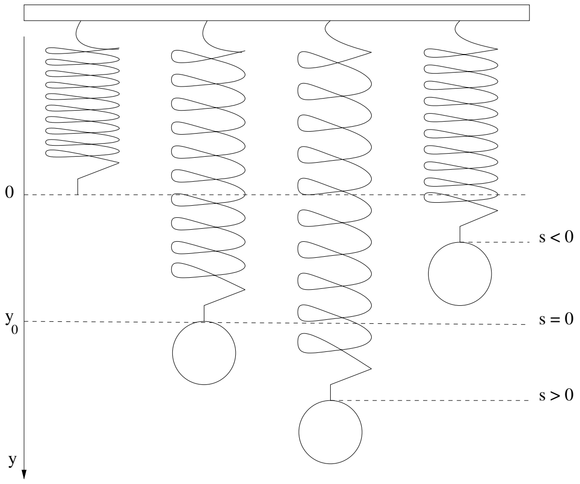

Abbildung 1: Verschiedene Situationen des Federpendels

Ein Federpendel besteht aus einer Feder mit der Federkonstanten D und der Grundlänge l_0 sowie aus einer angehängten Masse m. Die Feder wird im Ruhezustand durch die Masse auf die Länge l_0+y_0 ausgedehnt. Da die Grundlänge der Feder für unsere Betrachtungen keine Rolle spielt, betrachten wir nur noch die Längenänderung y, deren Nullpunkt das Ende der unbelasteten Feder ist.

Die resultierende Kraft aus Gewichts- und Federkraft bezeichnet man als rücktreibende Kraft F_R, die immer in Richtung der Ruhelage wirkt. Sie ergibt sich beim Fadenpendel aus der Differenz von Gewichtskraft ($F_G = m \cdot g$) und Federkraft ($F_F(y) = D \cdot y$). Für den Ruhepunkt y_0 gilt dann die Kräftegleichung:

$$F_R(y_0) = F_G - F_F(y_0) = 0\,\mathrm{N} \qquad (4.1)$$

Bei einem schwingenden System ändert sich die Länge der Feder laufend mit der Zeit. Es gilt:

$$F_R(t) = F_G - F_F(t) = F_G - D \cdot y(t) \qquad (4.2)$$

Da die Gewichtskraft konstant ist und nicht von der Zeit abhängt, kann sie durch geschickte Wahl des Nullpunkts herausgekürzt werden. Der Nullpunkt wird von dem Ende der entspannten Feder ($y = 0$) auf das Ende der Feder in der Ruhelage ($s = 0$) verschoben: $y(t) = y_0 + s(t)$. Die rücktreibende Kraft ergibt sich dann unter Verwendung von Gleichung 4.1 als:

$$F_R(t) = F_G - (F_F(y_0) + F_F(s(t))) = -D \cdot s(t) \qquad (4.3)$$

Drückt man die rücktreibende Kraft durch die allgemeine Kraftformel $F = m \cdot a$ aus, dann gilt:

$$a(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t) \qquad (4.4)$$

Die erste Ableitung der Strecke nach der Zeit ist die Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{s}(t)$. [1] Die zweite Ableitung ist die Beschleunigung: $a(t) = \ddot{s}(t)$.

$$\ddot{s}(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t) \qquad (4.5)$$

Diese Gleichung wird als Differentialgleichung bezeichnet. Eine Differentialgleichung enthält eine Funktion, sowie eine oder mehrere ihrer Ableitungen.

Diese Differentialgleichung läßt sich durch eine Frage relativ einfach lösen: Welche Funktion ist gleich seiner negativen zweiten Ableitung?

Die Sinusfunktion erfüllt diese Bedingung: $s = A \cdot \sin(kt)$. Die Amplitude A hat als konstanter Faktor keine Auswirkung auf die Ableitung. Er wird daher für die weiteren Betrachtungen weggelassen. Der Faktor k ist so zu wählen, dass bei der Periodendauer T der Sinus einmal durchgelaufen ist: Dann gilt

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad (4.6)$$

Und damit die zweite Ableitung:

$$\ddot{s}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 s(t) \qquad (4.7)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung 4.5, dann folgt:

$$-\frac{D}{m} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad (4.8)$$

Wir formen nach T um und erhalten:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (4.9)$$

[1] Die Ableitung wird allgemein durch ein Apostroph am Funktionszeichen dargestellt. Bei der Ableitung nach der Zeit ist ein Punkt über dem Größenzeichen üblich.