7 Eigenschaften des harmonischen Oszillators

Am Beispiel des Federpendels soll die Energie des harmonischen Oszillators betrachtet werden. Als erstes ein Überblick über die bekannten Fakten:

Die zeitabhängige Elongation eines harmonischen Oszillators entspricht einer Sinuskurve.

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin \omega t \tag{7.1}$$

Da die Geschwindigkeit v die erste Ableitung und die Beschleunigung a die zweite Ableitung der Elongation nach der Zeit darstellen folgt:

$$v(t) = \dot{y}(t) = \omega \hat{y} \cdot \cos \omega t \tag{7.2}$$

$$a(t) = \ddot{y}(t) = -\omega^2 \hat{y} \cdot \sin \omega t \tag{7.3}$$

Die Periodendauer ist unabhängig von der Amplitude.

Und damit auch Frequenz und Winkelgeschwindigkeit:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}\,;\ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}\,;\ \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{7.4}$$

Die rücktreibende Kraft ist proportional und engegengesetzt zur Elongation.

$$F_R = -D \cdot y \tag{7.5}$$

7.1 Energien

Der harmonische Oszillator hat zwei besondere Zustände. Diese sind die Ruhelage und die Amplitude. In der Ruhelage gibt es keine rücktreibende Kraft, da dort alle Kräfte ausgeglichen sind. Um das Pendel aus seiner Ruhelage zu bringen, muss gegen die rücktreibende Kraft entgegengearbeit werden. Es wird potentielle Energie aufgebaut. In der Ruhelage selbst ist diese potentielle Energie gleich Null, dafür befindet sich das Pendel in Bewegung. In der Amplitude stoppt das Federpendel kurzzeitig. Seine Geschwindigkeit und damit seine kinetische Energie sind dann Null. Dafür ist hier die potentielle Energie am größten. Da in einem abgeschlossenen System keine Energie verloren geht (ungedämpfter Harmonischer Oszillator) ist die Energiemenge konstant.

$$'E = E(t)_{\text{pot}} + E(t)_{\text{kin}} = \text{const.} \tag{7.6}$$

Dabei gilt für die Energien:

$$\text{Bewegungsenergie: } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.7}$$

$$\text{Spannenergie: } E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Dy^2 \tag{7.8}$$

Störend ist, dass die potentielle Energie von D und y abhängt und die kinetische Energie von m und v. Ersetzen wir in Gleichung 7.7 die Geschwindigkeit durch Gleichung 7.2, dann erhalten wir:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2\cos^2\omega t \tag{7.9}$$

Aus Gleichung 7.4 erhalten wir für die Federhärte $D = m\omega^2$ und setzen dies ein.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\hat{y}^2\cos^2\omega t \tag{7.10}$$

Mit der trigonometrischen Formel $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ können wir umformen und erhalten.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\hat{y}^2\left(1 - \sin^2\omega t\right) = \frac{1}{2}D\left(\hat{y}^2 - \hat{y}^2\sin^2\omega t\right) \tag{7.11}$$

Ersetzen wir die Sinusfunktion mit der Elongation (Gleichung 7.1), dann folgt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\left(\hat{y}^2 - y(t)^2\right) \tag{7.12}$$

Da die Gesamtenergie $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ konstant bleibt, folgt:

$$E = \frac{1}{2}Dy(t)^2 + \frac{1}{2}D\left(\hat{y}^2 - y(t)^2\right) = \frac{1}{2}D\hat{y}^2 \tag{7.13}$$

A 7.1. Eine Feder mit der Federkonstante $D = 10\,\text{N/m}$ der Länge $s_e = 20\,\text{cm}$ im entspannten Zustand wird senkrecht aufgehängt und eine Masse von $m = 400\,\text{g}$ wird angehängt. Das Feder-Masse-System wird nun um 20 cm aus der Ruhelage nach unten ausgelenkt und dann losgelassen.

a) Berechne die Länge der gesamten Feder, wenn sich das System in der Ruhelage befindet.
b) Bestimme die Periodendauer des schwingenden Systems.
c) Gebe die Amplitude dieses schwingenden Systems an.
d) Bestimme die rücktreibende Kraft in der Amplitude und in der Ruhelage.
e) Berechne die Energie des schwingenden Systems.
f) Bestimme die Geschwindigkeit in der Amplitude und in der Ruhelage.