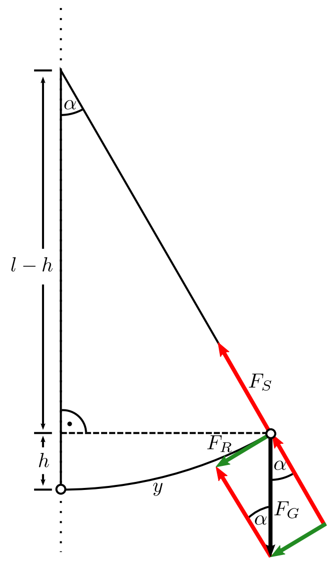
9.2 Herleitung

In der Ruheposition hebt die Scheinkraft der Schnur F_S die Gewichtskraft F_G auf. Wird das Pendel um den Winkel α aus der Ruhelage ausgelenkt, sind Schnur und Gewichtskraft nicht mehr parallel. Die Schnurkraft kann deshalb die Gewichtskraft nicht mehr völlig ausgleichen. Die Differenz beider Kräfte ist die Rückstellkraft F_R. Die Rückstellkraft steht dabei senkrecht zur Schnurkraft. Die drei Kräfte bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit F_G als Hypotenuse und F_S und F_R als Katheten. Der Auslenkwinkel α findet sich zwischen der Gewichtskraft und dem Schnurkraft wieder.



Wir müssen noch berücksichtigen, dass die Richtung des Winkels α entgegengesetzt zur Rückstellkraft F_R steht. Daher gilt:

$$\sin\alpha = -\frac{F_R}{F_G} \Longrightarrow F_R = -F_G \cdot \sin\alpha \tag{9.1}$$

Das Massestück legt beim Pendel einen Kreisbogen zurück. Dies ist die Elongation y. Für die Elongation gilt, wenn α im Bogenmaß angegeben wird:

$$\alpha = \frac{y}{l} \tag{9.2}$$

Wir fügen zusammen und erhalten:

$$F_R = -F_G \cdot \sin\frac{y}{l} \tag{9.3}$$

Damit ist das Schwerependel kein Harmonischer Oszillator. Die Periodendauer hängt von der Amplitude ab, da die Rückstellkraft nicht proportional zur Elongation ist.

Mit einem Trick kann man aber das Schwerependel doch zu einem Harmonischen Oszillator machen. Wenn das Schwerependel nur leicht ausgelenkt wird, so dass der Amplitudenwinkel kleiner als 5° bleibt, können wir eine Näherung für den Sinus verwenden. Es gilt $\sin\alpha \approx \alpha$, wenn α im Bogenmaß verwendet wird. Dann gilt:

$$F_R = -\frac{F_G}{l} \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y \tag{9.4}$$

Damit ergibt sich eine fiktive Federhärte

$$F_R = -D \cdot y = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y \Longrightarrow D = \frac{m \cdot g}{l} \tag{9.5}$$

Dann folgt für die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9.6}$$

und für die Energie

$$E = \frac{1}{2}D\hat{y}^2 = \frac{mg}{2l}\hat{y}^2 = \frac{1}{2}lmg\hat{\alpha}^2 \tag{9.7}$$

9.3 Anwendung des Schwerependels

A 9.1. Eine Kirchturmuhr in Stade ($g = 9{,}8128\,\mathrm{m/s^2}$) wird über ein Pendel gesteuert. Die Uhr ist so gebaut, dass bei jedem Durchgang durch die Ruhelage der Sekundenzeiger um genau eine Sekunde weiter geht. Bestimme die Länge des Pendels.

A 9.2. Eine Kuckucksuhr hat eine effektive Pendellänge von 7 cm. Bestimme die Periodendauer für Stade und Zürich ($g = 9{,}8067\,\mathrm{m/s^2}$) und vergleiche die beiden Werte miteinander.

A 9.3. Um den Ortsfaktor von Wien zu bestimmen wird ein Schwerependel mit einer exakten Längen von 1,000 000 m Länge aufgestellt. Für 10 000 Perioden wurde eine Zeit von 20 062,10 s gemessen. Berechne den Ortsfaktor von Wien.

A 9.4. Ein hochpräzises Schwerependel wird von einem Geologen zur Rohstoffsuche verwendet. Erläutern Sie, wie der Geologe mit dem Schwerependel das mögliche Vorkommen eines Öllagers und eines Eisenerzlagers unter seinen Füßen erkennen und unterscheiden kann.